

А. В. СЯСЕВ

Диференціальні рівняння

Навчальний посібник

Міністерство освіти і науки України
Дніпропетровський національний університет

А. В. СЯСЄВ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник
для студентів технічних спеціальностей
вищих навчальних закладів*

Дніпропетровськ
Видавництво Дніпропетровського
національного університету
2007

УДК 004.421.2(075.8)
ББК 32.973.26 – 018я73

С 99

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(лист № 14/18.2-842 від 31.03.2006 р.)

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, проф. Я. Г. Савула
(Львівський національний університет ім. І. Франка)
доктор фізико-математичних наук, проф. А. Н. Хомченко
(Херсонський національний технічний університет)
доктор технічних наук, проф. М. М. Біляєв
(Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту
ім. Лазаряна)

Сясев А. В.

С 99 Диференціальні рівняння: Навч. посіб. – Д.: Вид-во ДНУ,
2007. – 356 с.
ISBN 978-966-551-234-9

Викладено основні теоретичні питання теорії звичайних диференціальних рівнянь та методи їх розв'язування (інтегрування). Наведені докладні розв'язання типових задач з додатковими поясненнями теоретичних положень, які при цьому застосовувались. Посібник має на меті допомогти студентам оволодіти основами теорії звичайних диференціальних рівнянь і практичними навичками їх розв'язання, а також навчити проводити дослідження розв'язків диференціальних рівнянь, що описують різноманітні процеси. Достатньо уваги приділено підбору і розв'язанню задач, що роз'яснюють основні ідеї, поняття, теоретичні факти та їх практичне застосування; підбору великого числа задач для самостійного розв'язання студентами.

Для студентів та аспірантів вищих навчальних закладів, викладачів і наукових співробітників, які цікавляться теорією звичайних диференціальних рівнянь.

УДК 004.421.2(075.8)
ББК 32.973.26 – 018я73

ISBN 978-966-551-234-9

© А. В. Сясев, 2007
© Видавництво ДНУ, оформлення, 2007

УВАГА!!! Електронна версія посібника дещо відрізняється від друкованої версії. Це стосується тільки кількості сторінок, нумерації сторінок і оформлення (форматування). САМ ЗМІСТ (НАПОВНЕННЯ) ПОСІБНИКА ПОВНІСТЮ ЕДЕНТИЧНИ !!!

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	5
Розділ I. Основні поняття і означення теорії диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння першого порядку.....	6
1.1. Загальні питання. Задачі, що приводяться до диференціальних рівнянь.....	6
1.2. Диференціальні рівняння першого порядку. Основні поняття і означення.....	14
1.3. Основні класи рівнянь, які інтегруються у квадратурах.....	24
1.4. Рівняння Ріккаті.....	40
1.5. Рівняння у повних диференціалах. Інтегруючий множник.....	44
1.6. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку.....	52
1.7. Особливі точки.....	63
1.8. Диференціальні рівняння першого порядку, нерозв'язанні відносно похідної.....	72
1.9. Особливі розв'язки. Обвідна сім'ї кривих.....	79
Розділ II. Диференціальні рівняння вищих порядків.....	88
2.1. Загальні питання. Теорема про існування та єдиність розв'язку.....	88
2.2. Рівняння n -го порядку, що інтегруються в квадратурах.....	91
2.3. Рівняння, що допускають зниження порядку.....	96
Розділ III. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків.....	101
3.1. Основні поняття і означення.....	101
3.2. Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку.....	103
3.3. Формула Остроградського – Ліувілля та її застосування до знаходження загального розв'язку однорідного рівняння.....	108
3.4. Зниження порядку лінійного однорідного диференціального рівняння.....	112
3.5. Лінійні неоднорідні рівняння. Метод варіації довільних сталих.....	116
Розділ IV. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків із сталими коефіцієнтами.....	124
4.1. Лінійні однорідні рівняння вищого порядку із сталими коефіцієнтами і диференціальні рівняння, що зводяться до них.....	124
4.2. Рівняння Бесселя.....	135
4.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищого порядку із сталими коефіцієнтами із спеціальною правою частиною.....	141
4.4. Крайові задачі.....	152
Розділ V. Системи диференціальних рівнянь.....	160
5.1. Нормальна система диференціальних рівнянь. Існування і єдиність розв'язку задачі Коші.....	160
5.2. Інтегрування нормальної система диференціальних рівнянь методом виключення невідомих функцій.....	164

УВАГА!!! Електронна версія посібника дещо відрізняється від друкованої версії. Це стосується тільки кількості сторінок, нумерації сторінок і оформлення (форматування). САМ ЗМІСТ (НАПОВНЕННЯ) ПОСІБНИКА ПОВНІСТЮ ЕДЕНТИЧНИ !!!

5.3. Перший інтеграл. Симетрична форма системи диференціальних рівнянь.....	168
5.4. Лінійна система диференціальних рівнянь. Загальні питання.....	171
5.5. Лінійна однорідна система диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера.....	174
5.6. Лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами. Метод Лагранжа.....	185
Розділ VI. Вступ до теорії стійкості.....	191
6.1. Основні означення та теореми. Стійкість за Ляпуновим.....	191
6.2. Дослідження на стійкість за першим наближенням.....	198
6.3. Метод функцій Ляпунова.....	200
Розділ VII. Рівняння з частинними похідними першого порядку.....	204
7.1. Основні поняття.....	204
7.2. Лінійні однорідні рівняння.....	206
7.3. Лінійні неоднорідні рівняння.....	210
Розділ VIII. Наближені методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.....	213
8.1. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів.....	214
8.2. Метод послідовних наближень.....	222
8.3. Метод малого параметра.....	229
8.4. Знаходження періодичних розв'язків диференціального рівняння за допомогою рядів Фур'є та метода малого параметра.....	231
8.5. Метод Ейлера.....	244
8.6. Метод Рунге-Кутта.....	249
Розділ IX. Деякі застосування диференціальних рівнянь.....	257
9.1. Геометричні задачі.....	257
9.2. Фізичні задачі.....	260
9.3. Задачі механіки.....	265
9.4. Задачі теплопровідності.....	280
9.5. Різні задачі.....	286
ДОДАТКИ.....	291
Додаток 1. Таблиця основних інтегралів	291
Додаток 2. Основні типи диференціальних рівнянь та метод їх розв'язування....	292
Список рекомендованої літератури.....	298

ПЕРЕДМОВА

У пропонованому посібнику викладені основні теоретичні питання теорії звичайних диференціальних рівнянь та методи їх розв'язування (інтегрування). Наведені докладні розв'язання типових задач з додатковими поясненнями теоретичних положень, які були при цьому застосовані.

Посібник має на меті допомогти студентам усіх технічних спеціальностей, які вивчають курс звичайних диференціальних рівнянь оволодіти основами теорії звичайних диференціальних рівнянь і практичними навичками їх розв'язування, а також навчити проводити дослідження розв'язків диференціальних рівнянь, що описують різноманітні процеси в різних галузях науки. У посібнику достатньо уваги приділено підбору і розв'язуванню задач, що роз'яснюють основні ідеї, поняття, теоретичні факти та їх практичне застосування; підбору великого числа задач для самостійного розв'язування студентами.

Посібник складений з урахуванням останніх вимог до навчального процесу і його зміст у повній мірі охоплює програму з курсу звичайних диференціальних рівнянь у вищих навчальних закладах.

Автор вдячний рецензентам – доктору фізико-математичних наук, професору Савулі Я. Г.; доктору фізико-математичних наук, професору Хомченко А.Н.; доктору технічних наук, професору Біляєву Н.Н. а також колективу кафедри диференціальних рівнянь Дніпропетровського національного університету за корисні зауваження та рекомендації, що сприяли поліпшенню даного видання.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ОЗНАЧЕННЯ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Загальні питання.

Задачі, що приводяться до диференціальних рівнянь

При вивченні різних фізичних процесів і явищ часто не вдається безпосередньо знайти закон, що зв'язує величини, які їх характеризують, але в той же час легко встановлюються залежності між тими ж величинами і їх похідними або диференціалами.

Рівняння, у яких невідома функція входить під знаком похідної або диференціала, називаються *диференціальними рівняннями*. Наприклад,

$$y' - 2xy^2 + 5 = 0, \quad (1.1)$$

$$(x^2 + y^2)dx + xy dy = 0, \quad (1.2)$$

$$\ddot{x} + m^2 x = A \sin \omega t, \quad (1.3)$$

$$y''' - xy'' = x, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0. \quad (1.5)$$

Якщо невідома функція є функцією однієї незалежної змінної, то диференціальне рівняння називається *звичайним*. Якщо ж двох і більш числа змінних, то – *рівнянням з частинними похідними*. Рівняння (1.1) – (1.4) є звичайними диференціальними рівняннями, а (1.5) – рівнянням з частинними похідними.

З формально-математичної точки зору задача розв'язання (інтегрування) диференціальних рівнянь є задача, зворотна диференціюванню.

Задача диференціального числення полягає в тому, щоб за заданою функцією знайти її похідну. Найпростіша зворотна задача вже зустрічається в інтегральному численні: дана функція $f(x)$, знайти її первісну. Якщо невідому первісну функцію позначити через y , то ця задача може бути записана у формі рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (1.6)$$

або

$$dy = f(x)dx. \quad (1.7)$$

Рівносильні між собою рівняння (1.6) і (1.7) є найпростішими диференціальними рівняннями. Ми вже вміємо їх розв'язувати. Справді, з інтегрального числення відомо, що найбільш загальна функція y , що задовольняє рівняння (1.6), або рівняння (1.7), має вигляд

$$y = \int f(x)dx + C. \quad (1.8)$$

Отже, наше диференціальне рівняння має безліч розв'язків, кожний з яких виходить, якщо довільній сталій C надати певне числове значення. Розв'язок (1.8) рівняння (1.6), що містить довільну сталу, називається *загальним розв'язком*. Кожний розв'язок, що виходить із загального, якщо надати сталій C конкретне числове значення, називається *частинним розв'язком*.

Таким чином, предметом теорії диференціальних рівнянь є розробка методів інтегрування диференціальних рівнянь і дослідження властивостей їхніх розв'язків.

Задачу знаходження розв'язків диференціальних рівнянь через елементарні функції можна здійснити тільки в окремих випадках, а для деяких диференціальних рівнянь, наприклад рівняння Ріккаті, як показав Ж. Лиувіль, не можна знайти розв'язок через кінцеве число знаків елементарних функцій і квадратур. Тому виникають задачі знаходження наближеного виразу для розв'язку диференціального рівняння.

Розглянемо деякі задачі, що приводяться до диференціальних рівнянь.

Задача 1. Визначити рівняння руху точки m по вертикальній прямій під дією сили ваги.

Розв'язання. Прийmemo за вісь Oy вертикальну пряму, по якій рухається точка; початок помістимо на поверхні Землі, а додатний напрямок будемо відраховувати нагору. Щоб знати рівняння руху нашої точки в будь-який момент часу t після початку руху ($t = 0$), треба знати вираз єдиної координати y цієї точки як функції часу t .

З механічного змісту другої похідної випливає, що прискорення дорівнює $\frac{d^2 y}{dt^2}$. З іншого боку, ми знаємо, що прискорення сили ваги в кожній точці земної поверхні і поблизу її постійно і дорівнює $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$. Воно спрямовано вниз, отже, у нашій системі координат йому треба додати знак «мінус». Дорівнюючи два знайдені вирази для прискорення точки, одержуємо рівняння, у якому невідомою є функція $y = y(t)$, тобто

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g. \quad (1.9)$$

Інтегруючи співвідношення (1.9) двічі по t , послідовно матимемо:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1, \quad (1.10)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2. \quad (1.11)$$

Вираз (1.11) є загальним розв'язком рівняння (1.9). Він містить дві довільні сталі C_1 і C_2 .

З'ясуємо фізичний зміст цих сталих. Поклавши у рівнянні (1.10) $t = 0$, одержуємо $C_1 = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = v_0$ – початкова швидкість точки. Аналогічно з рівняння (1.11), дістанемо $C_2 = y|_{t=0} = y_0$ – початкове положення точки.

З цими новими позначеннями довільних сталих, ми запишемо загальний розв'язок (1.11) диференціального рівняння (1.9) у вигляді

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + y_0.$$

Тепер стає ясно, які додаткові дані (*початкові умови*) треба мати, щоб одержати частинний розв'язок, що описує один цілком визначений рух. Необхідно знати числові значення початкового положення точки y_0 і початкової швидкості v_0 .

Задача 2. Гнучка однорідна нить підвішена за два кінці. Знайти рівняння кривої, по якій розташується нить за дією власної ваги (рис. 1.1).

Розв'язання. Нехай $M_0(0;b)$ – найбільш низька точка ниті, M – її довільна точка. Розглянемо частину ниті M_0M . Ця частина знаходиться в рівновазі за дією трьох сил:

- 1) натяг T , що діє по дотичній у точці M і складає з віссю Ox кут φ ;
- 2) натяг H у точці M_0 , що діє горизонтально;
- 3) вага ниті γs , яка спрямована вертикально вниз, де s – довжина дуги M_0M , γ – питома вага ниті.

Розкладаючи натяг T на горизонтальну і вертикальну складові, одержимо рівняння рівноваги:

$$T \cos \varphi = H,$$

$$T \sin \varphi = \gamma s.$$

Поділивши члени другої рівності на відповідні члени першої, одержимо:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma}{H} s. \quad (1.12)$$

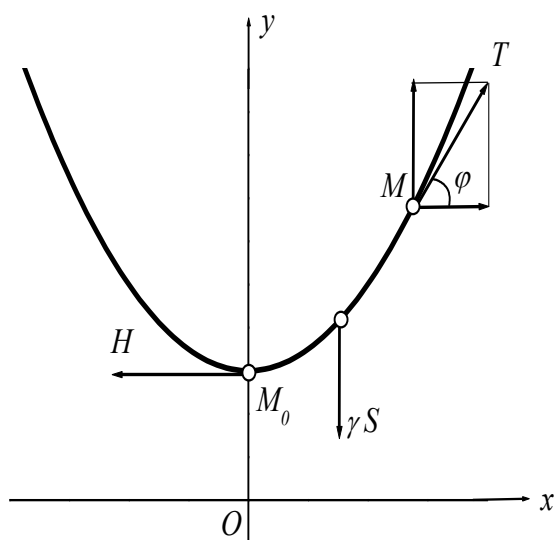


Рис. 1.1

Припустимо тепер, що рівняння невідомої кривої можна записати у вигляді $y = f(x)$. Тут $f(x)$ – невідома функція, яку слід знайти.

Помітимо, що $\operatorname{tg} \varphi = f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Тоді, з (1.12) випливає

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma}{H} s. \quad (1.13)$$

Диференціюємо обидві частини рівності (1.13) по x

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\gamma}{H} \frac{ds}{dx}. \quad (1.14)$$

Але, як відомо з курсу математичного аналізу,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}.$$

Підставляючи значення $\frac{ds}{dx}$ у рівняння (1.14), одержимо диференціальне рівняння шуканої кривої:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\gamma}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}. \quad (1.15)$$

Не зупиняючись на методах розв'язування диференціальних рівнянь, запишемо загальний розв'язок рівняння (1.15)

$$y = \left(\frac{H}{\gamma} \right) \operatorname{ch} \left(\left(\frac{\gamma}{H} \right) x + C_1 \right) + C_2. \quad (1.16)$$

Визначимо константи C_1 і C_2 . Оскільки при $x = 0$ точка ниті займає саме низьке положення, то в цій точці дотична горизонтальна, тобто $y'(0) = 0$. Крім того, за умовою задачі, у цій точці ордината дорівнює b , тобто $y(0) = b$.

З рівняння (1.16) дістанемо

$$y' = \operatorname{sh} \left(\left(\frac{\gamma}{H} \right) x + C_1 \right).$$

Підставляючи сюди $x = 0$, одержимо $0 = \operatorname{sh} C_1$. Отже $C_1 = 0$.

З рівняння (1.16), поклавши $x = 0$ і $C_1 = 0$, одержуємо $b = \frac{H}{\gamma} + C_2$, звідки

$$C_2 = b - \frac{H}{\gamma}.$$

Остаточно матимемо

$$y = \frac{H}{\gamma} ch\left(\frac{\gamma}{H} x\right) + b - \frac{H}{\gamma}.$$

Задача 3. Вода витікає через отвір у дні циліндричної посудини. За яким законом буде знижуватися рівень води в посудині з часом, якщо відомо, що швидкість v витікання рідини з отвору залежить від висоти h стовпа рідини таким чином:

$$v = 0,6\sqrt{2gh} \quad (g = 981 \text{ см/сек}^2).$$

Розв'язання. Позначимо (рис. 1.2) через H висоту посудини, S – площу її основи, s – площу отвору і h – висоту рідини в посудині у момент t .

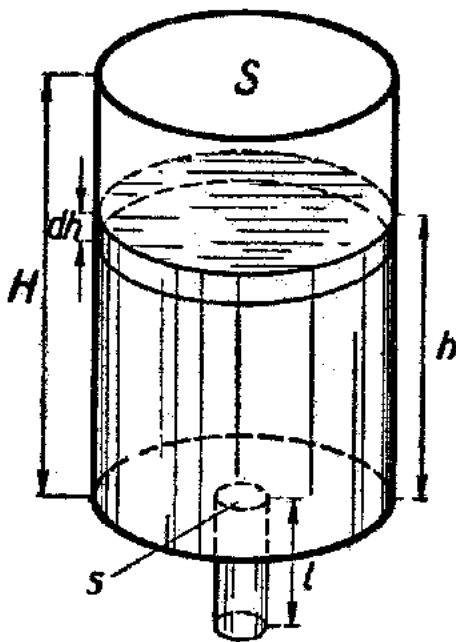


Рис. 1.2

Протягом часу від t до $t + \Delta t$ висота рівня в посудині знизиться з h до $h + \Delta h$ ($\Delta h < 0$). За цей час із посудини витече об'єм води, який дорівнює $-S\Delta h$. Такий же повинний бути об'єм струменя рідини, що витекла за цей час з отвору. Він дорівнює площі s , помноженій на довжину шляху l , пройденого часткою рідини з моменту t до $t + \Delta t$. Рух її нерівномірний: у момент t швидкість $v = 0,6\sqrt{2gh}$, а у момент $t + \Delta t$ швидкість $v = 0,6\sqrt{2g(h + \Delta h)}$. Для обчислення довжини пройденого шляху скористаємося середньою швидкістю: $l = v_{\text{ср}}\Delta t$, де $v_{\text{ср}} = 0,6\sqrt{2g(h + \Theta\Delta h)}$ ($0 < \Theta < 1$).

Отже, ми приходимо до співвідношення

$$-S\Delta h = 0,6\sqrt{2g(h + \Delta h)} \cdot \Delta t \cdot s.$$

Звідси $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -k\sqrt{h + \Theta\Delta h}$, $k = 0,6 \frac{s}{S} \sqrt{2g}$. Переходячи до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, одержуємо диференціальне рівняння нашої задачі

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}.$$

Його загальний розв'язок має вигляд

$$2\sqrt{h} = -kt + C.$$

Враховуючи, що у момент $t = 0$, $h = H$, дістанемо $2\sqrt{H} = C$. І таким чином, приходимо до рівності $2\sqrt{h} = -kt + 2\sqrt{H}$, звідки

$$t = \frac{2}{k}(\sqrt{H} - \sqrt{h}).$$

Такий закон витікання рідини з отвору в дні посудини. Поклавши $h = 0$, знаходимо, що вся рідина витече із посудини за $t = \frac{2}{k}\sqrt{H}$ сек.

Задача 4. Відомо, що швидкість розпаду радію прямо пропорційна його кількості. Знайти закон зміни маси радію залежно від часу.

Розв'язання. Нехай $R(t)$ – кількість радію в момент часу t . Швидкість розпаду радію як швидкість зміни функції є похідна. Отже, закон розпаду можна записати так:

$$\dot{R} = -kR, \quad k > 0, \quad (1.17)$$

де k – коефіцієнт пропорційності (знак мінус означає, що маса радію з часом зменшується і відповідно $\dot{R} < 0$).

Щоб розв'язати диференціальне рівняння (1.17), запишемо його у вигляді

$$dt = -\frac{dR}{kR}. \quad (1.18)$$

З інтегрального числення відомо, що рівняння (1.18) задовольняє функція

$$t + C = -\frac{1}{k} \ln R,$$

де C – довільна стала. Звідси визначаємо R як функцію t

$$R = e^{-kt-kC} = C_1 e^{-kt}. \quad (1.19)$$

Нехай R_0 – кількість радію в момент часу $t = t_0$. Тоді з (1.19) маємо

$$R_0 = C_1 e^{-kt_0},$$

звідки $C_1 = R_0 e^{kt_0}$. Підставивши знайдене значення C_1 в (1.19) матимемо

$$R = R_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

При $t_0 = 0$

$$R = R_0 e^{-kt}.$$

Це і є закон зміни початкової маси радію залежно від зміни часу.

Експериментально встановлено, що для радію $k = 0,000436$.

Знайдемо період піврозпаду радію, тобто відрізок часу, за який розпадається половина початкової маси. Маємо

$$\frac{R_0}{2} = R_0 e^{-0,000436 T},$$

звідки

$$-0,000436T = -\ln 2$$

і

$$T = \frac{\ln 2}{0,000436} = 1590 \text{ р.}$$

Взагалі кажучи, не існує будь-яких загальних правил для складання диференціальних рівнянь за умовами конкретної задачі. Умови задачі мають бути такі, щоб дозволяли скласти співвідношення, що зв'язує незалежну змінну, функцію і її похідну (або похідні). Якщо це задача геометричного характеру, то наявність у її даних дотичної (нормалі) або деяких зв'язаних з нею відрізків дає можливість написати співвідношення між координатами точок кривої і кутовим коефіцієнтом дотичної. У задачах фізичного або механічного характеру, у випадку якщо задається швидкість будь-якого процесу, буває можливо відразу написати відповідне диференціальне рівняння. В інших випадках попередньо встановлюється співвідношення між збільшеннями змінних, і потім переходом до границі одержують диференціальне рівняння.

Задачі такого роду можна розглядати ще і ще, але вони є все-таки практичною стороною питання, тому більш докладно ці задачі мають бути розглянутими на практичних заняттях.

Означення. Звичайним диференціальним рівнянням відносно функції $y = f(x)$ називається співвідношення, що зв'язує незалежну змінну x , невідому функцію $y = f(x)$ і її похідні $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Загальний вигляд такого рівняння

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Означення. Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної, що входить у рівняння.

Наприклад, рівняння (1.1), (1.2) – диференціальні рівняння першого порядку, рівняння (1.3), (1.5) – другого, а (1.4) – третього порядку.

Означення. Розв'язком або інтегралом диференціального рівняння називається будь-яка неперервна, n -раз диференційована функція, яка, будучи підставленою до рівняння, перетворює його в тотожність.

Приклад. Нехай ми маємо рівняння $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$.

Функції $y = \sin x$, $y = 2 \cos x$, $y = 3 \sin x - \cos x$ і взагалі функції виду $y = C_1 \sin x$; $y = C_2 \cos x$ або $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ є розв'язками даного рівняння при будь-якому виборі сталих C_1 і C_2 ; у цьому легко переконатися, підставивши зазначені функції в рівняння.

Характерна особливість диференціального рівняння це те, що воно має нескінченну множину розв'язків.

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яке рівняння називається диференціальним? Загальний вигляд диференціального рівняння?

2. Що називається розв'язком диференціального рівняння? Як називається операція знаходження розв'язку диференціального рівняння?

3. Чим відрізняється звичайне диференціальне рівняння від рівняння з частинними похідними?

4. Що називається порядком диференціального рівняння?

5. Чим відрізняється загальний розв'язок диференціального рівняння від частинного?

6. Скільки розв'язків має диференціальне рівняння?

7. Показати, що задані функції є розв'язками відповідних диференціальних рівнянь:

а) $y = Cx$ для рівняння $y - xy' = 0$;

б) $y = \frac{C}{\cos x}$ для рівняння $dy - y \operatorname{tg} x dx = 0$;

в) $y = \ln x + C$ для рівняння $dx - xdy = 0$;

г) $y = b \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+y}{b} + C$ для рівняння $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = b^2$;

д) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ для рівняння $y'' + y = 0$;

е) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ для рівняння $y'' - y = 0$;

ж) $y = C_1 + C_2 \sin(x + C_3)$ для рівняння $y''' + y' = 0$;

з) $y = Cx + C - C^2$ для рівняння $y = xy' + y' - (y')^2$;

і) $e^{-y} - Cx = 1$ для рівняння $xy' + 1 = e^y$;

к) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = C$ для рівняння $y' = -\frac{1+y^2}{1+x^2}$.

1.2. Диференціальні рівняння першого порядку. Основні поняття і означення

Означення. Звичайним диференціальним рівнянням першого порядку відносно функції $y = f(x)$ називається співвідношення, яке зв'язує незалежну змінну x , невідому функцію $y = f(x)$ і її першу похідну, тобто співвідношення виду

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.20)$$

Якщо рівняння (1.20) можна розв'язати відносно y' , то воно записується у вигляді

$$y' = f(x, y). \quad (1.21)$$

У цьому випадку говорять, що диференціальне рівняння (1.21) розв'язане відносно похідної.

Вище ми бачили, що диференціальне рівняння може мати нескінченну множину розв'язків. Надалі (п. 1.6.) ми сформулюємо умови, що визначають існування і єдиність розв'язків диференціального рівняння (1.21).

Умова про те, що при $x = x_0$ невідома функція приймає значення y_0 називається *початковою умовою* і записується так

$$y(x_0) = y_0 \quad (1.22)$$

або

$$y(x)|_{x=x_0} = y_0.$$

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція

$$y = \varphi(x, C), \quad (1.23)$$

яка залежить від незалежної змінної x та однієї довільної сталої C (параметра) і задовольняє наступні умови:

1) функція (1.23) задовольняє диференціальне рівняння при довільному значенні сталої C ;

2) яка б ні була початкова умова (1.22), можна знайти таке значення $C = C_0$, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє дану початкову умову.

При цьому передбачається, що значення x_0 , y_0 належать до тієї області D зміни змінних x і y , у якій виконуються умови теореми існування і єдиності розв'язку (див. п. 1.6).

У процесі знаходження загального розв'язку диференціального рівняння ми часто приходимо до співвідношень виду

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (1.24)$$

не розв'язаному відносно y . Розв'язуючи це співвідношення відносно y , одержуємо загальний розв'язок у вигляді (1.23). Однак виразити y із

співвідношення (1.24) у елементарних функціях не завжди виявляється можливим; у таких випадках загальний розв'язок залишають у неявному вигляді. Рівність виду (1.24), що неявно задає загальний розв'язок, називається *загальним інтегралом* диференціального рівняння.

Означення. Частинним розв'язком називається будь-яка функція $y = \varphi(x, C_0)$, що виходить із загального розв'язку (1.23), якщо в останньому довільній сталій C надати певне значення $C = C_0$.

Співвідношення $\Phi(x, y, C_0) = 0$ називається в цьому випадку *частинним інтегралом* рівняння.

Зауваження. Задачу про відшукування частинного розв'язку диференціального рівняння називають *задачею Коші*.

Зауваження. Який порядок диференціального рівняння, стільки ж констант буде в загальному розв'язку і стільки ж початкових умов для відшукування частинного розв'язку.

Приклад. Для рівняння $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ загальним розв'язком буде сім'я функцій $y = \frac{C}{x}$. Знайдемо частинний розв'язок, що задовольняє наступну початкову умову $y(2)=1$. Підставляючи ці значення в загальний розв'язок $y = C/x$, одержимо $C=2$. Отже, шуканим частинним розв'язком (розв'язком задачі Коші) буде функція $y = 2/x$.

Узагалі кажучи, для точки (x_0, y_0) , що належить області D , у якій задається диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$, буде існувати розв'язок, що задовольняє відповідну початкову умову: при $x = x_0$ $y = y_0$; при цьому такий розв'язок буде єдиним. Точка (x_0, y_0) області D , у якій єдиність розв'язку порушується, тобто або немає розв'язку, що задовольняє поставлену початкову умову, або цю початкову умову задовольняє більш ніж один розв'язок (і, отже, завданням цієї початкової умови частинний розв'язок однозначно не визначається), називається *особливою точкою* диференціального рівняння.

Так, диференціальне рівняння $y'x - y = 0$ має, як легко перевірити, загальний розв'язок $y = Cx$, причому початкову умову (при $x=0$ $y=0$) задовольняють усі частинні розв'язки, усі вони «проходять через точку» $(0;0)$. Точка $(0;0)$ є особливою точкою цього диференціального рівняння. У цій точці, як це безпосередньо видно, рівняння не встановлює ніякого співвідношення між x , y і y' . Та ж точка $(0;0)$ є особливою і для диференціального рівняння $y'x + y = 0$, що має загальний розв'язок $y = \frac{C}{x}$, але по тій причині, що через неї не проходить графіка жодного розв'язку; немає розв'язку, який задовольняє початкову умову: при $x=0$ $y=0$.

Крім загального розв'язку і частинних розв'язків, що впливають з нього, у диференціального рівняння можуть існувати розв'язки, які не утворюються з

загального ні при яких значеннях параметра. Так, у рівняння $y' = \sqrt{1-y^2}$, крім загального розв'язку $y = \sin(x+C)$, $-\frac{\pi}{2} \leq x+C \leq \frac{\pi}{2}$ є ще розв'язки $y = 1$ і $y = -1$, які не утворюються з загального ні при яким значенні C .

Якщо кожна точка розв'язку $y = \varphi(x)$ (який не утворюється з загального) є особою точкою, диференціального рівняння, то він є *особливим розв'язком*.

Помітимо, що можуть бути особливі розв'язки, які входять до складу загального розв'язку; з іншого боку, розв'язки, які не утворюються з загального, може і не бути особливим. Особливий розв'язок характеризується тим, що через кожну точку його графіка, крім його самого, проходять графіки ще деяких інших розв'язків даного диференціального рівняння.

Геометричний зміст розв'язків диференціального рівняння. З геометричної точки зору, загальний інтеграл (загальний розв'язок) диференціального рівняння першого порядку являє собою сім'ю кривих на координатній площині, що залежить від однієї довільної сталої C . Ці криві називаються *інтегральними кривими* даного диференціального рівняння. Частинному інтегралу диференціального рівняння відповідає одна крива цієї сім'ї, що проходить через деяку задану точку площини.

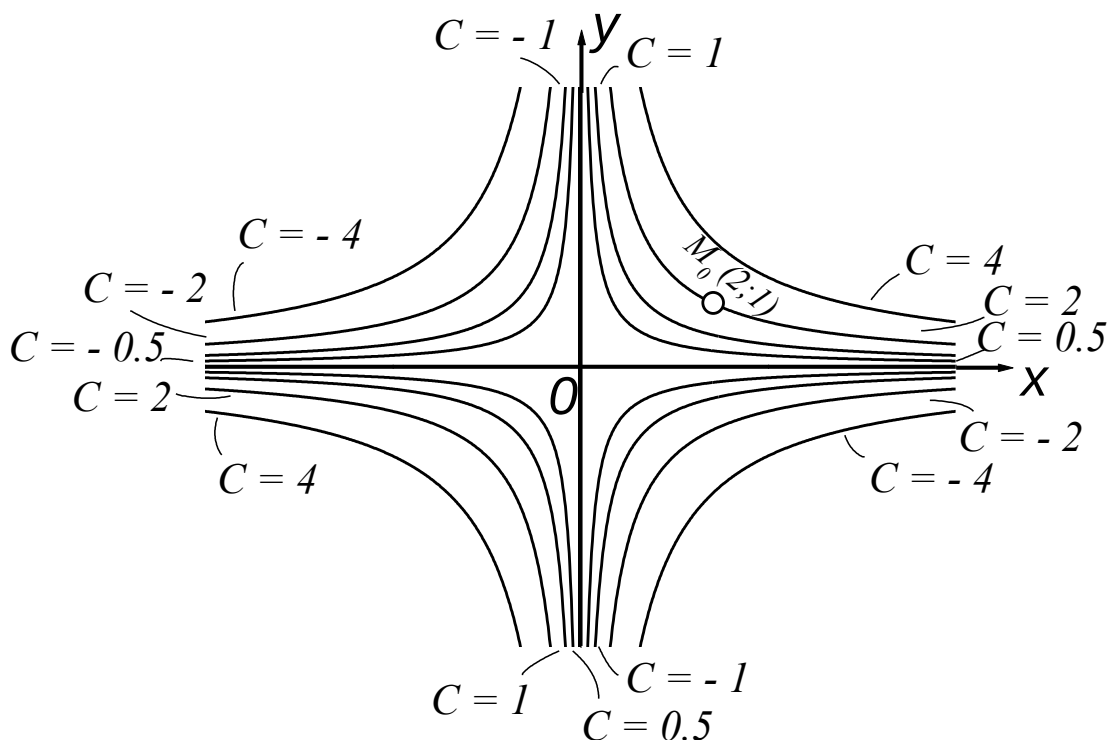


Рис. 1.3

Так, в останньому прикладі загальний інтеграл геометрично зображується сім'єю гіпербол $y = \frac{C}{x}$, а частинний інтеграл, визначений заданою початковою умовою, зображується однією з цих гіпербол, що проходить через точку $M_0(2;1)$.

На рис. 1.3 зображені криві сім'ї, що відповідають деяким значенням параметра: $C = 1/2$, $C = 1$, $C = 2$, $C = 4$, $C = -1$ і т.д.

Щоб зробити міркування більш наочними, ми будемо надалі називати *розв'язком рівняння* не тільки функцію $y = \varphi(x, C_0)$, що задовольняє рівнянню, але і відповідну *інтегральну криву*. У зв'язку з цим ми будемо говорити, наприклад, про розв'язок, що проходить через точку $(x_0; y_0)$.

Розв'язати або *проінтегрувати* диференціальне рівняння – означає:

а) знайти його загальний розв'язок або загальний інтеграл, якщо початкові умови не задані,
або

б) знайти частинний розв'язок рівняння тобто розв'язати задачу Коші, якщо крім рівняння задані початкові умови.

Зауваження. Надалі завжди будемо вважати, що процес розв'язування диференціального рівняння закінчено, якщо для одержання розв'язку (інтегралу) залишається обчислити інтеграли. Якщо при цьому виявляється, що інтеграл не обчислюється у елементарних функціях, то це не має відношення до процесу розв'язування рівняння.

Геометрична інтерпретація диференціального рівняння першого порядку. Нехай дане диференціальне рівняння (1.21), розв'язане відносно похідної, і нехай функція виду (1.23) є загальним розв'язком даного рівняння. Цей загальний розв'язок визначає сім'ю інтегральних кривих на площині Oxy .

Рівняння (1.21) для кожної точки $M(x; y)$ визначає значення похідної $\frac{dy}{dx}$, тобто кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої, що проходить через цю точку. Таким чином, диференціальне рівняння (1.21) дає сукупність напрямків, або як кажуть, визначає *поле напрямків* на площині Oxy . Це поле можна зобразити, помістивши у відповідних точках області стрілки, що утворюють з віссю Ox кути $\arctg(y')$ (додатний напрямок стрілки можна взяти довільним, тому що арктангенс визначає кут лише з точністю до кратного π).

Отже, з геометричної точки зору задача інтегрування диференціального рівняння полягає у відшуванні кривих, напрямки дотичних до яких збігається з напрямком полів у відповідних точках.

Для диференціального рівняння (1.20) геометричне місце точок, у яких виконується співвідношення $\frac{dy}{dx} = C = \text{const}$ (тобто нахил дотичних однаковий), називається *ізокліною* даного диференціального рівняння.

При різних значеннях C одержуємо різні ізокліни. Рівняння ізокліни, що відповідає значенню C , з (1.21) буде мати вигляд $f(x, y) = C$. Побудувавши сім'ю ізоклін, можна приблизно побудувати сім'ю інтегральних кривих. Говорять, що, знаючи ізокліни, можна якісно визначити розташування інтегральних кривих на площині.

На рис. 1.4 зображене поле напрямків, що визначає диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. Ізоклінами даного диференціального рівняння є (відповідно до означення) $\frac{-y}{x} = C$, або $y = -Cx$.

Це сім'я прямих.

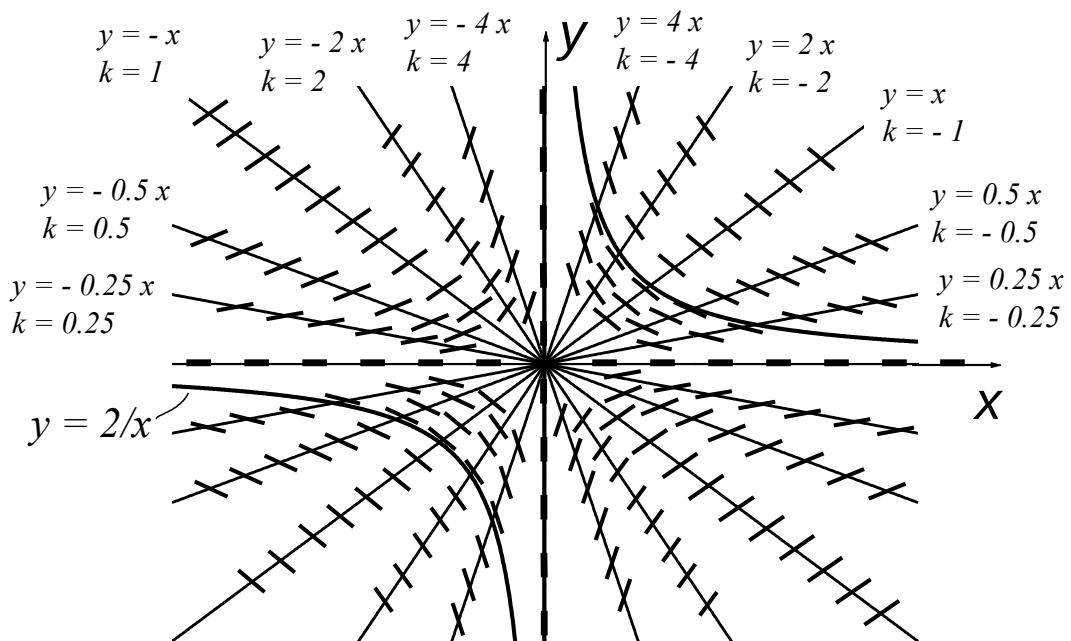


Рис. 1.4

Приклад. За допомогою ізоклін наближено побудувати інтегральні криві рівняння $\frac{dy}{dx} = 2x(1-y)$.

Розв'язання. Сім'я ізоклін для даного рівняння визначається рівнянням $2x(1-y) = k$, де k – дійсний параметр.

Це рівняння задають дві прямі: $x = 0$ і $y = 1$ (при $k = 0$) і сім'я гіпербол $y = 1 - \frac{k}{2x}$.

Пряма $y=1$ є інтегральною кривою, тому що функція $y=1$ є розв'язком вихідного диференціального рівняння. Вісь ординат (ізокліна при $k=0$) інтегральні криві перетинають під прямим кутом, тобто дотичні до них паралельні осі абсцис. Це означає, що точки прямої $x=0$ є точками екстремуму для інтегральних кривих.

Щоб з'ясувати характер екстремальних точок, обчислимо другу похідну функції $y = y(x)$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2(1-y) - 2x \frac{dy}{dx} = 2(1-y) - 2x \cdot 2x(1-y) = 2(1-y)(1-2x^2).$$

Отже, точки осі ординат, для яких $y > 1$, є точками максимуму, а точки осі ординат, для яких $y < 1$, – точками мінімуму інтегральних кривих. З виразу для другої похідної випливає також, що точки прямих $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ є точками перегину інтегральних кривих, тому що в цих точках y'' звертається в нуль.

Далі, прямі $x=0$ і $y=1$ (ізокліни при $k=0$) поділяють координатну площину на чотири частини, у кожній з яких похідна y' має той самий знак. Отже, перетинаючи пряму $x=0$, інтегральні криві переходять з області зростання функції $y(x)$ в область убуття, якщо $y > 1$, і з області убуття функції $y(x)$ в область зростання, якщо $y < 1$. Розглянемо ще дві ізокліни: при $k=1$, $y=1-\frac{1}{2x}$ і при $k=-1$, $y=1+\frac{1}{2x}$. Дотичні, проведені до інтегральних кривих у

точках перетинання з зазначеними ізоклінами, утворюють з віссю абсцис кути 45° і 135° відповідно.

Одержаної інформації досить для побудови інтегральних кривих вихідного рівняння (рис.1.5а). Для порівняння, на рис. 1.5б наведений розв'язок, одержаний методом ізоклін у пакеті Maple.

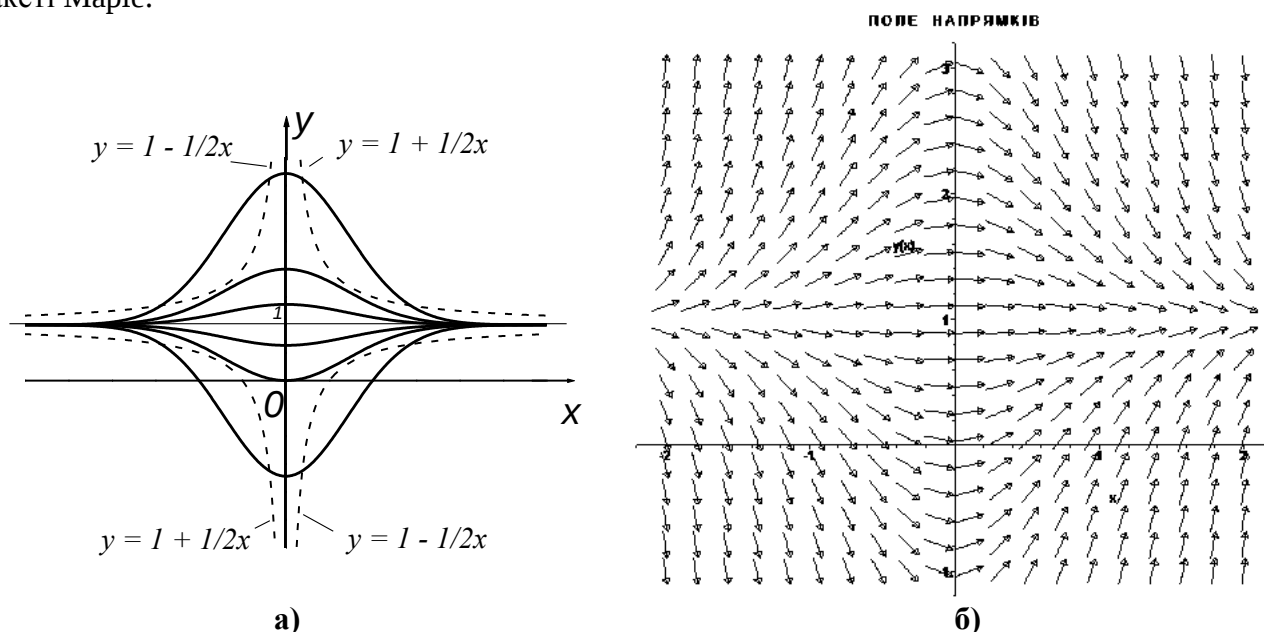


Рис. 1.5

Диференціальному рівнянню першого порядку можна дати і **механічне тлумачення**. Позначивши незалежну змінну через t , а невідому функцію через x , будемо казати, що диференціальне рівняння

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

визначає співвідношення, що існує у деякій прямолінійній русі у кожний момент часу t між пройденим шляхом x і швидкістю руху $\frac{dx}{dt}$.

Розв'язок виражає закон руху, задає шлях як функцію від часу $x = x(t)$, при цьому початкові умови t_0, x_0 дають положення точки, що рухається, у початковий момент.

Розглянемо тепер задачу, у деякому змісті зворотну задачі інтегрування диференціального рівняння: **складання диференціального рівняння для заданої сім'ї кривих.**

Нехай задана сім'я функцій, що залежить від одного параметра C

$$y = \varphi(x, C), \quad (1.25)$$

причому через кожну точку площини (або деякої області на площині) проходить тільки одна крива з цієї сім'ї. Для якого диференціального рівняння ця сім'я є загальним інтегралом?

Диференціюючи по x (1.25), одержимо

$$y' = \varphi'_x(x, C). \quad (1.26)$$

Якщо права частина виразу (1.26) не містить C , то ми вже зробили виключення параметра C й одержали диференціальне рівняння

$$y' = \varphi'_x(x). \quad (1.27)$$

У цьому випадку співвідношення (1.25) має вигляд

$$y = \varphi(x) + C$$

і є розв'язком рівняння (1.27).

Нехай тепер права частина рівності (1.26) містить C . Тоді і права частина рівності (1.25) містить C , тобто $\varphi'_x(x, C) \neq 0$, і в околі значень x_0, C_0 , для яких $\varphi'_x(x_0, C_0) \neq 0$, ми можемо визначити C як функцію від x і y

$$C = \psi(x, y). \quad (1.28)$$

У цьому випадку має місце тотожність

$$\psi(x, \varphi(x, C)) \equiv C. \quad (1.29)$$

Підставляючи значення C , що визначається формулою (1.28), у вираз (1.26), ми одержимо диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = \varphi'_x(x, \psi(x, y)). \quad (1.30)$$

Легко переконатися в тім, що (1.25) представляє його розв'язок при будь-якій значенні C . Справді, якщо ми підставимо цей вираз для y в рівняння (1.30), то у лівій частині одержимо $\varphi'_x(x, C)$, а у правій $\varphi'_x(x, \psi(x, \varphi(x, C)))$, а це, у силу тотожності (1.29), теж дає $\varphi'_x(x, C)$.

Приклад. Знайти диференціальне рівняння сім'ї кривих $y = Cx^2$.

Розв'язання. Диференціюючи по x рівняння сім'ї, знайдемо
 $y' = 2Cx$.

З умови $C = \frac{y}{x^2}$, випливає $y' = \frac{2y}{x}$.

Це і є шукане диференціальне рівняння, що має місце при $x \neq 0$, тобто в будь-якій області, що не містить точок на осі Oy .

Якщо співвідношення між x , y , C дано в неявному вигляді

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (1.31)$$

то, диференціюючи його по x , дістанемо

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' = 0. \quad (1.32)$$

Виключивши C зі співвідношень (1.31), (1.32), приходимо, при виконанні відповідних умов із теорії неявних функцій, до рівняння

$$F(x, y, y') = 0.$$

Попередні міркування показують, що (1.31) визначає його розв'язок.

Взагалі кажучи, щоб побудувати диференціальне рівняння, яке задовольняють криві сім'ї

$$\varphi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (1.33)$$

треба продиференціювати рівність (1.33) n раз, вважаючи y функцією від x , а потім із одержаних рівнянь і рівняння (1.33) виключити довільні сталі $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Приклад. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кривих: $x - y - Ce^{\frac{x}{y-x}} = 0$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді $(x - y)e^{\frac{x}{x-y}} = C$. Диференціюючи це співвідношення по x , одержуємо шукане рівняння

$$(x - y)e^{\frac{x}{x-y}} \cdot \frac{x - y - x(1 - y')}{(x - y)^2} + (1 - y')e^{\frac{x}{x-y}} = 0$$

або

$$\frac{xy' - y}{x - y} + 1 - y' = 0.$$

Остаточнo $xy' - 2y + x = 0$.

Як додаток проведених вище міркувань розглянемо **задачу про знаходження ортогональних траєкторій**.

Означення. Ізогональною траєкторією сім'ї кривих називається крива, що перетинає усі криві даної сім'ї під однаковим кутом α . Якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то траєкторія ортогональна (рис. 1.6).

Ізогональні траєкторії також складають деяку сім'ю кривих. Дана сім'я кривих і його ортогональні траєкторії взаємно ортогональні.

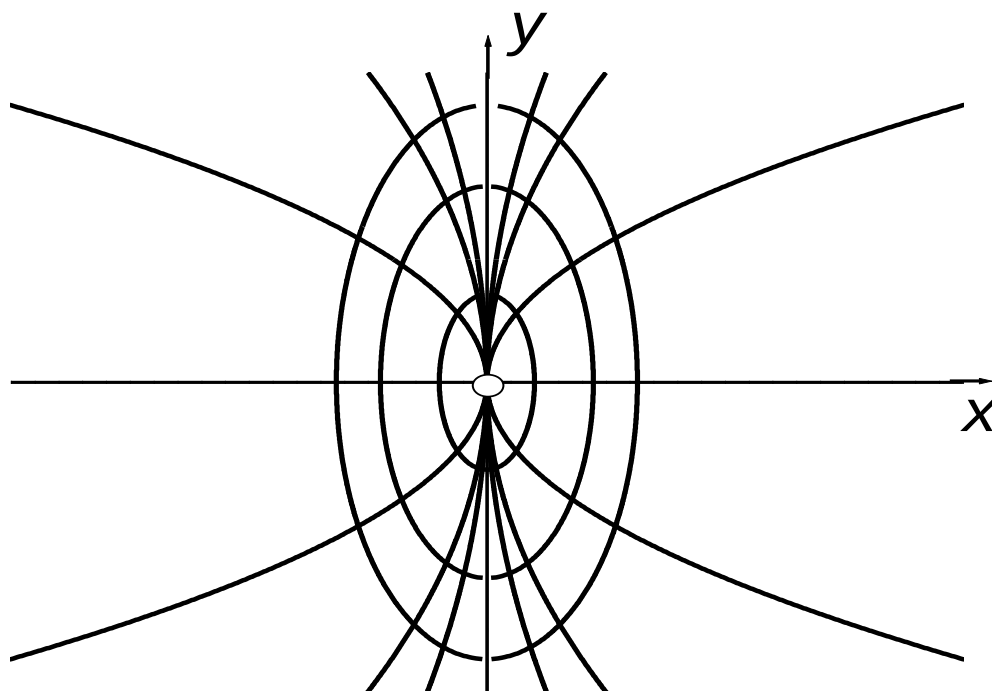


Рис. 1.6

Якщо $F(x, y, y') = 0$ – диференціальне рівняння даних кривих, то, використовуючи геометричний зміст похідної й умову ортогональності, неважко зрозуміти, що диференціальне рівняння ортогональних траєкторій виходить з нього заміною в ньому y' на $-\frac{1}{y'}$:

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

Інтегруючи це диференціальне рівняння, одержуємо остаточне рівняння ортогональних траєкторій. Якщо дані криві задані алгебраїчними рівняннями, то попередньо варто одержати їхнє диференціальне рівняння так, як показано вище.

Приклад. Знайти ортогональні траєкторії сім'ї парабол $y^2 = 2Cx$.

Розв'язання. Спочатку необхідно одержати диференціальне рівняння заданої сім'ї парабол. Для цього диференціюємо вираз $y^2 = 2Cx$ по x , матимемо

$$2yy' = 2C.$$

Виключивши параметр C з останнього співвідношення, одержимо

$$y' = \frac{y}{2x}.$$

Диференціальне рівняння ортогональних траєкторій знаходимо, замінюючи y' на $-\frac{1}{y'}$:

$$yy' = -2x.$$

Інтегруючи його, дістанемо

$$x^2 = -\frac{y^2}{2} + C,$$

або остаточно

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{2C} = 1.$$

Таким чином, ортогональні траєкторії являють собою сім'ю еліпсів (рис. 1.6).

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яке рівняння називається звичайним диференціальним рівнянням першого порядку? Загальний вигляд звичайного диференціального рівняння першого порядку?
2. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку? Чим відрізняється загальний розв'язок диференціального рівняння від його загального інтеграла?
3. Що називається частинним розв'язком диференціального рівняння?
4. У чому полягає геометричний зміст загального і частинного розв'язків диференціального рівняння?
5. Що означає: «розв'язати диференціальне рівняння»?
6. Що називається ізокліною диференціального рівняння? Рівняння ізокліни?
7. Геометрична та механічна інтерпретації диференціального рівняння першого порядку?
8. Задача про ортогональні та ізогональні траєкторії?
9. За допомогою ізоклін побудувати наближено інтегральні криві рівнянь:

а) $xy' = 2y$; б) $(x - y) \frac{dy}{dx} = x + y$;

В) $y' = x^2 + y^2 - 1$; Г) $y' = y - x^2$.

10.Скласти диференціальні рівняння сім'ї кривих:

а) $x^2 + y^2 - Cx = 0$, відповідь: $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$;

б) $y = \sin x + C \cos x$, ВІДПОВІДЬ: $y' \cos x + y \sin x = 1$;

$$\text{в) } x + y + C(1 - xy) = 0, \quad \text{відповідь: } y' + \frac{1 + y^2}{1 + x^2} = 0;$$

г) $y = ax^2 + be^x$, відповідь: $x(x-2)y'' - (x^2 - 2)y' + 2(x-1)y = 0$.

1.3. Основні класи рівнянь, які інтегруються у квадратурах

Рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними. Розглянемо диференціальне рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y), \quad (1.34)$$

де права частина є добуток функції, що залежить тільки від x , на функцію, що залежить тільки від y . Перетворимо його в такий спосіб (припускаючи, що $f_2(y) \neq 0$):

$$\frac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x) dx. \quad (1.35)$$

Метод розв'язування. Вважаючи y відомою функцією від x , рівність (1.35) можна розглядати як рівність двох диференціалів, а невизначені інтеграли від них будуть відрізнятися постійним доданком. Інтегруючи ліву частину по y , а праву по x , одержимо

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x) dx + C.$$

Ми одержали співвідношення, що зв'язує розв'язок y , незалежну змінну x і довільну сталу C , тобто одержали загальний інтеграл рівняння (1.34).

Таким чином, диференціальне рівняння (1.35), або у загальному вигляді

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \quad (1.36)$$

де $M(x)$ і $N(y)$ – неперервні функції, називають рівнянням з *відокремленими змінними*. Його загальний інтеграл по доведеному є

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C. \quad (1.37)$$

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння: $x dx + y dy = 0$.

Розв'язання. Згідно (1.37), загальний розв'язок даного рівняння одержимо у вигляді

$$\int x dx + \int y dy = C \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Означення. Рівняння виду

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad (1.38)$$

називається диференціальним рівнянням з *відокремлюваними змінними*.

Метод розв'язування. Рівняння (1.38) може бути приведене до рівняння з відокремленими змінними (1.36) шляхом ділення обох частин на вираз $N_1(y) M_2(x)$ (в області, де $N_1(y) \neq 0$ і $M_2(x) \neq 0$):

$$\frac{M_1(x)N_1(y)dx}{N_1(y)M_2(x)} + \frac{M_2(x)N_2(y)dy}{N_1(y)M_2(x)} = 0$$

або

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0,$$

тобто одержали рівняння виду (1.36).

Загальний розв'язок, згідно (1.37) одержимо у вигляді

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C. \quad (1.39)$$

Диференціальне рівняння виду $y' = f(ax + by + c)$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною $z = ax + by + c$, де a, b, c – сталі.

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$, який задовольняє початкову умову $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ (задача Коші).

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$ (вигляд (1.34)). Зробимо відокремлення змінних:

$$\frac{dy}{\operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} x dx.$$

Інтегруючи, одержимо

$$\int \operatorname{ctg} y dy = \int \operatorname{tg} x dx,$$

тобто

$$\ln |\sin y| = -\ln |\cos x| + C \quad \text{або} \quad \ln |\sin y| = -\ln |\cos x| + \ln |C|.$$

Звідси загальний інтеграл має вигляд

$$\sin y \cos x = C.$$

Підставляємо сюди початкову умову $x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{4}$, матимемо

$$\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = C; \quad C = \frac{1}{2}.$$

Тоді частинний розв'язок (розв'язок задачі Коші) має вигляд $\sin y \cos x = \frac{1}{2}$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $\frac{y}{x} y' + e^y = 0$.

Розв'язання. Покажемо, що дане рівняння – рівняння з відокремлюваними змінними (визначимо тип). Дійсно, розв'язуючи дане рівняння відносно похідної, одержимо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y}{y} \cdot x,$$

тобто рівняння виду (1.34), а це й означає, відповідно до означення, що це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні

$$\frac{y dy}{e^y} = -x dx.$$

Інтегруючи останнє співвідношення, матимемо

$$\int y e^{-y} dy = -\int x dx,$$

$$-ye^{-y} - e^{-y} + C = -\frac{x^2}{2}.$$

Тоді остаточно загальний розв'язок запишемо у вигляді

$$\frac{x^2}{2} - ye^{-y} - e^{-y} + C = 0.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння має вигляд (1.38). Відповідно до методу його розв'язування, ділимо обидві частини рівняння на xy :

$$\frac{(1+x)y}{xy}dx + \frac{(1-y)x}{xy}dy = 0; \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

Прийдемо до рівняння виду (1.36)

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0.$$

Його загальний інтеграл, згідно (1.37) або (1.39), записується так

$$\int \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx + \int \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy = C$$

або остаточно

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = C.$$

Приклад. Показати, що рівняння $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})dx + (1-y)dy = 0$ є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Розв'язання. Внесемо в першому доданку $\sqrt{x}$ за дужки, одержимо

$$\sqrt{x}(\sqrt{y} + 1)dx + (1-y)dy = 0,$$

тобто рівняння виду (1.38) – рівняння з відокремлюваними змінними або

$$\sqrt{x}dx + \frac{(1-y)}{\sqrt{y}+1}dy = 0,$$

– рівняння з відокремленими змінними.

Однорідні рівняння першого порядку та рівняння, які зводяться до них.

Означення. Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією n -го виміру щодо змінних x і y , якщо при будь-якому $\lambda = \text{const}$ виконується тотожність

$$f(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^n f(x, y). \quad (1.40)$$

Приклад. Функція $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ – однорідна функція першого виміру, тому що виконується тотожність (1.40) при $n = 1$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3} = \lambda \sqrt[3]{x^3 + y^3} \equiv \lambda f(x, y).$$

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку виду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.41)$$

називається однорідним щодо змінних x і y , якщо функція $f(x, y)$ є однорідна функція своїх аргументів нульового виміру, тобто має місце тотожність

$$f(\lambda x, \lambda y) \equiv f(x, y). \quad (1.42)$$

Або іншими словами: якщо у рівнянні (1.41) кожен x і кожен y помножити на деяке число $\lambda = \text{const}$ і після цього рівняння не зміниться, то воно є однорідним.

Приклад. Диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ є однорідним, тому що функція $f(x, y) = -\frac{y}{x}$ є однорідною функцією нульового виміру щодо своїх аргументів, тобто виконується тотожність (1.42)

$$f(\lambda x, \lambda y) = -\frac{\lambda y}{\lambda x} = -\frac{y}{x} \equiv f(x, y).$$

Метод розв'язування. Поклавши в (1.42) $\lambda = \frac{1}{x}$, одержуємо тотожність

$$f(x, y) \equiv f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Оскільки в правій частині стоїть функція тільки одного аргументу $\frac{y}{x}$, то позначаючи її через $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, однорідне рівняння завжди можна представити у вигляді

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1.43)$$

При довільно заданій неперервній функції φ змінні не відокремлюються. Але оскільки в праву частину змінні входять тільки у комбінації $\frac{y}{x}$, то можна очікувати, що рівняння спроститься, якщо ввести нову невідому функцію $u = \frac{y}{x}$. Тоді

$$y = ux, \quad y' = u'x + u. \quad (1.44)$$

Підставляючи (1.44) у (1.43), одержимо

$$u + u'x = \varphi(u)$$

або

$$xdu = (\varphi(u) - u)dx.$$

Змінні відокремлюються, якщо обидві частини поділити на $x(\varphi(u) - u)$. Матимемо

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи, дістанемо

$$\int \frac{du}{\varphi(u)-u} = \ln|x| + C. \quad (1.45)$$

Якщо в останнім виразі замінити u його значенням $\frac{y}{x}$, то одержимо загальний інтеграл рівняння (1.43).

Таким чином, будь-яке однорідне рівняння першого порядку виду (1.43) зводиться за допомогою підстановки (1.44) до рівняння з відокремлюваними змінними, у загальному розв'язку якого, змінюючи $u = \frac{y}{x}$, одержимо загальний розв'язок вихідного однорідного рівняння.

Зауваження. При фактичному інтегруванні однорідного рівняння не обов'язково зводити його до виду (1.43); досить переконатися в тім, що рівняння належить до розглянутого типу, і безпосередньо застосувати підстановку (1.44); користатися готовою формулою (1.45) теж недоцільно.

Зауваження. Рівняння виду $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ буде однорідним тоді і тільки тоді, коли $M(x,y)$ і $N(x,y)$ є однорідними функціями одного виміру. Це впливає з того, що відношення двох однорідних функцій того самого виміру є однорідною функцією нульового виміру.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$.

Розв'язання. Визначимо тип рівняння. Для цього спочатку перевіримо умову (1.42):

$$\lambda xy' = \lambda xe^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} + \lambda y = \lambda \left(xe^{\frac{y}{x}} + y \right) \Leftrightarrow f(\lambda x, \lambda y) \equiv f(x, y),$$

тобто дане рівняння – однорідне. Використовуючи заміну (1.44) воно зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними щодо нової невідомої функції. Отже,

$$y = ux, \quad y' = u'x + u.$$

Тоді

$$\begin{aligned} u'x + u &= e^u + u, \\ \frac{du}{dx} x &= e^u. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними з невідомою функцією $u(x)$.

Відокремлюємо змінні

$$e^{-u} du = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи, дістанемо

$$\begin{aligned} \int e^{-u} du &= \int \frac{dx}{x}, \\ e^{-u} &= -\ln|x| + \ln|C| \end{aligned}$$

або

$$e^{-u} = \ln \left| \frac{C}{x} \right|.$$

Звідси загальний розв'язок рівняння (1.46) можемо записати у вигляді

$$u = -\ln \ln \left| \frac{C}{x} \right|. \quad (1.47)$$

Щоб записати загальний розв'язок вихідного однорідного рівняння необхідно за допомогою (1.44) повернутися до старої невідомої функції $y(x)$, тобто в (1.47) замість u підставити $u = \frac{y}{x}$. Після цього будемо мати

$$\frac{y}{x} = \ln \ln \left| \frac{C}{x} \right|$$

або остаточно загальний розв'язок вихідного однорідного рівняння

$$y = -x \ln \ln \left| \frac{C}{x} \right|.$$

Приклад. Розв'язати задачу Коші

$$(x^2 - 2xy)dy + (y^2 - xy)dx = 0, \quad y(1) = 1.$$

Розв'язання. Рівняння однорідне. Перепишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$$

Використовуючи заміну (1.44), приведемо останнє рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{u - u^2}{1 - 2u},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \left(\frac{u - u^2}{1 - 2u} - u \right) = \frac{1}{x} \frac{u^2}{1 - 2u}.$$

Відокремлюємо змінні

$$\frac{(1 - 2u)du}{u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування матимемо

$$\frac{1}{u} + 2 \ln |u| = -\ln |x| + \ln |C|,$$

$$\ln \left(u^2 e^{\frac{1}{u}} \right) = \ln \left| \frac{C}{x} \right|.$$

Остаточно загальний інтеграл рівняння з відокремлюваними змінними запишемо у вигляді

$$u^2 e^{\frac{1}{u}} = \frac{C}{x}.$$

Тоді загальний інтеграл однорідного рівняння має вигляд

$$\frac{y^2}{x} e^{\frac{x}{y}} = C.$$

Визначимо значення довільної сталої C з початкової умови $y(1)=1$. Одержимо $C=e$.
Тоді розв'язок задачі Коші

$$\frac{y^2}{x} e^{\frac{x}{y}} = e.$$

Розглянемо тепер *рівняння, які зводяться до однорідного*. Вони мають вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}, \quad (1.48)$$

де $a, b, c, a_1, b_1, c_1 - \text{const}$.

Якщо $c_1 = c = 0$, то рівняння (1.48) є однорідне. Нехай тепер c_1, c (або одне з них) відмінні від нуля.

Метод розв'язування.

1. Зробимо заміну змінних

$$x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k \quad (h, k - \text{const}). \quad (1.49)$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}. \quad (1.50)$$

Підставляючи до співвідношення (1.50) вирази (1.48), (1.49), матимемо

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}. \quad (1.51)$$

Підберемо h і k так, щоб виконувалися рівності

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0, \end{cases} \quad (1.52)$$

тобто визначимо h і k , як розв'язок системи рівнянь (1.52). За цієї умови рівняння (1.51) стає однорідним

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}.$$

Розв'язавши це рівняння й перейшовши знову до x і y за формулами (1.49), (1.50) одержимо розв'язок рівняння (1.48).

2. Система (1.52) не має розв'язку, якщо

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто $ab_1 = a_1b$. Але в цьому випадку $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, тобто $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$ і, отже, рівняння (1.48) можна перетворити до виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + by) + c}{\lambda(ax + by) + c_1}. \quad (1.53)$$

Тоді підстановкою

$$z = ax + by, \quad (1.54)$$

рівняння (1.53) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Дійсно,

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx},$$

звідки

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}. \quad (1.55)$$

Підставляючи у рівняння (1.53) вирази (1.54) і (1.55), одержимо

$$\frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z + c}{\lambda z + c_1},$$

а це є рівняння з відокремлюваними змінними.

Прийом, застосовний до інтегрування рівняння (1.48), застосовується і до інтегрування рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right),$$

де f – яка завгодно неперервна функція.

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$.

Розв'язання. Дане рівняння має вид (1.48) і відноситься до рівнянь, що зводиться до однорідного. Зробимо заміну змінних

$$x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k.$$

Тоді вихідне рівняння буде мати вигляд

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + h + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}.$$

Розв'язуючи систему двох рівнянь

$$\begin{cases} h + k - 3 = 0, \\ h - k - 1 = 0, \end{cases}$$

знаходимо $h = 2$, $k = 1$. У результаті одержуємо однорідне рівняння

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1},$$

яке розв'язуємо підстановкою

$$y_1 = ux_1, \quad y_1' = u'x_1 + u.$$

Тоді матимемо наступне рівняння з відокремлюваними змінними

$$u + x_1 u' = \frac{1 + u}{1 - u},$$

або

$$x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}.$$

Відокремлюємо змінні

$$\frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx_1}{x_1}.$$

Інтегруючи, знаходимо

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} u &= \frac{1}{2} \ln |1+u^2| + \ln |x_1| + \ln |C|, \\ \operatorname{arctg} u &= \ln |Cx_1 \sqrt{1+u^2}|. \end{aligned}$$

Звідси

$$Cx_1 \sqrt{1+u^2} = e^{\operatorname{arctg} u}.$$

Підставляючи сюди $u = \frac{y_1}{x_1}$, одержимо

$$Cx_1 \sqrt{1 + \frac{y_1^2}{x_1^2}} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1}}.$$

Нарешті, переходячи до змінних x і y , остаточно одержуємо загальний інтеграл

$$C \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y-1}{x-2}}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$.

Розв'язання. Це рівняння вже не можна розв'язувати підстановкою (1.49), тому що в цьому випадку система рівнянь, що служить для визначення h і k , має визначник, який дорівнює нулю (переконатися самостійно).

Це рівняння можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними заміною (1.54), тобто $2x+y=z$.

Тоді $y' = z' - 2$, і рівняння зводиться до виду

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5}$$

або

$$z' = \frac{5z+9}{2z+5}.$$

Розв'язуючи його, дістанемо

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25} \ln |5z+9| = x + C.$$

Оскільки $z = 2x + y$, то ми одержимо остаточно загальний інтеграл вихідного рівняння у вигляді

$$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25} \ln |10x+5y+9| = x + C$$

або

$$10y - 5x + 7 \ln |10x+5y+9| = C.$$

Лінійні рівняння першого порядку.

Означення. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, лінійне відносно невідомої функції і її похідної. Воно має вигляд

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad (1.56)$$

де $y = y(x)$ – невідома функція; $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції в області зміни x ; коефіцієнт при похідній без обмеження спільності приймемо рівним одиниці.

Якщо $Q(x) \equiv 0$, то рівняння (1.56) має вигляд

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad (1.57)$$

і називається лінійним однорідним (або без правої частини), а рівняння (1.56) – неоднорідним. Однорідне лінійне рівняння (1.57) являє собою рівняння з відокремлюваними змінними й інтегрується однією квадратурою:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx, \\ \ln |y| = -\int P(x)dx + \ln |C|,$$

Таким чином, його загальний розв'язок має вигляд

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \quad (1.58)$$

Формула (1.58) дійсно дає загальний розв'язок рівняння (1.57), тому що серед загублених розв'язків міг бути тільки розв'язок $y = 0$, а він міститься у (1.58) при $C = 0$.

Розв'язок диференціального рівняння, який не можна одержати з загального ні при яким значенні довільної сталої C , називають *особливим розв'язком*.

Методи розв'язування. I. Для розв'язування лінійного неоднорідного рівняння (1.56) розглянемо спочатку *метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)*, суть якого полягає у тому, що у виразі (1.58) параметр C вважається ні сталою, а невідомою функцією від x і $C(x)$ знаходять у такому вигляді, щоб функція

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (1.59)$$

була розв'язком неоднорідного диференціального рівняння (1.56). Підставляючи (1.59) у рівняння (1.56), одержимо

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

або

$$\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Звідси

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_1,$$

де C_1 – довільна стала.

Підставляючи знайдене значення $C(x)$ у вираз (1.59), одержуємо загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння (1.56)

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[C_1 + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right]. \quad (1.60)$$

Помітимо, що розв'язок (1.60) представляє суму двох доданків:

1) $C_1 e^{-\int P(x)dx}$ є загальний розв'язок однорідного рівняння (1.57), що відповідає неоднорідному рівнянню (1.56);

2) $e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$ є частинний розв'язок неоднорідного рівняння (він виходить із загального, якщо покласти $C_1 = 0$).

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' + y = \sin x$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним, тому що $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$ – відповідає загальному виду лінійного неоднорідного рівняння (1.56). Для розв'язання цього рівняння скористаємося методом варіації довільної сталої.

1) знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Тоді

$$y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|$$

або остаточно

$$y = \frac{C}{x}. \quad (1.61)$$

2) нехай $C = C(x)$, причому (1.61) – частинний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння. Підставляючи (1.61) у вихідне рівняння, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} &= \frac{\sin x}{x}, \\ \frac{1}{x} C'(x) &= \frac{\sin x}{x}, \\ C'(x) &= \sin x. \end{aligned}$$

Інтегруючи, дістанемо

$$C(x) = -\cos x + C_1.$$

3) підставляючи $C(x)$ в (1.61), одержимо загальний розв'язок

$$y = \frac{1}{x} (C_1 - \cos x).$$

II. Для розв'язування лінійного неоднорідного рівняння (1.56) можна скористатися ще *методом заміни невідомої функції (метод Бернуллі)*, відповідно до якого, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння відшукується у вигляді

$$y(x) = u(x)v(x), \quad (1.62)$$

де $u(x)$ і $v(x)$ – диференційовані функції. Тоді

$$y' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x), \quad (1.63)$$

і підстановка (1.62), (1.63) у рівняння (1.56) дає

$$v(x) \frac{du(x)}{dx} + u(x) \left(\frac{dv(x)}{dx} + P(x)v(x) \right) = Q(x). \quad (1.64)$$

Функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ підберемо так, щоб їхній добуток задовольняв рівняння (1.56). Визначимо функцію v таким чином, щоб коефіцієнт при u в (1.64) дорівнював нулю, тобто

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0,$$

звідси

$$v = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Нам досить узяти частинний розв'язок, наприклад, при $C = 1$, тобто

$$v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Отже, рівняння (1.64) зводиться до рівняння

$$v \frac{du}{dx} = Q(x)$$

або, підставляючи сюди знайдене $v(x)$, матимемо

$$du = e^{\int P(x)dx} Q(x) dx.$$

Інтегруючи, одержимо

$$u = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C_1.$$

Підставляючи знайдені функції $u(x)$ і $v(x)$ у вираз (1.62), одержимо загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння (1.56) у вигляді

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C_1 \right],$$

як і у випадку застосування методу варіації довільної сталої.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$.

Розв'язання. Скористаємося методом заміни невідомої функції. Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + v'u$ і вихідне рівняння прийме вигляд

$$u'v + v'u - \frac{2uv}{x+1} = (x+1)^3$$

або, виносячи в другому і третьому доданку в лівій частині u за дужки

$$u'v + u \left(v' - \frac{2v}{x+1} \right) = (x+1)^3.$$

1) визначимо функцію v таким чином, щоб коефіцієнт при u дорівнював нуль, тобто

$$v' - \frac{2v}{x+1} = 0 \iff \frac{dv}{2v} = \frac{dx}{x+1} \implies \frac{1}{2} \ln|v| = \ln|x+1|.$$

Тоді

$$v = (x+1)^2.$$

2) за умови обертання в нуль коефіцієнта при функції u , матимемо наступне рівняння для визначення функції u

$$u'v = (x+1)^3.$$

Підставляючи сюди знайдену функцію v , дістанемо

$$u'(x+1)^2 = (x+1)^3 \implies \frac{du}{dx} = x+1.$$

Після інтегрування одержимо остаточний вираз для функції u

$$u = \frac{x^2}{2} + x + C_1.$$

Тоді загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд

$$y = (x+1)^2 \left(\frac{x^2}{2} + x + C_1 \right).$$

Таким чином, за допомогою методу Бернуллі лінійне неоднорідне рівняння зводиться до розв'язання двох рівнянь з відокремлюваними змінними для визначення функцій u і v .

III. З формули для загального розв'язку рівняння (1.56) видно, що цей розв'язок визначається за допомогою двох квадратур, число яких можна зменшити, коли відомі деякі частинні розв'язки рівняння (1.56). Так, якщо відомий один частинний розв'язок рівняння (1.56), то це рівняння можна звести до лінійного однорідного. Отже, приймаючи в (1.56)

$$y = u + y_1(x),$$

де $y_1(x)$ – відомий частинний розв'язок цього рівняння, будемо мати

$$\frac{du}{dx} + \frac{dy_1}{dx} + P(x)u + P(x)y_1 = Q(x)$$

або, зважаючи на те, що $y_1(x)$ є, по припущенню, розв'язок рівняння (1.56),

тобто $\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 = Q(x)$ останнє рівняння прийме вигляд

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0,$$

звідки

$$u = Ce^{-\int P(x)dx},$$

а загальний розв'язок рівняння (1.56) одержимо у вигляді

$$y = y_1(x) + Ce^{-\int P(x)dx},$$

тобто він виражається в цьому випадку за допомогою однієї квадратури.

Якщо відомі два частинні розв'язки неоднорідного рівняння (1.56), то його загальний розв'язок знаходиться без квадратур.

Рівняння Бернуллі. До лінійного рівняння перетворенням невідомої функції легко зводиться рівняння Бернуллі, що має вигляд

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n. \quad (1.65)$$

Тут $P(x)$, $Q(x)$ – задані неперервні функції в області зміни x ; $y = y(x)$ – невідома функція; n – деяке постійне число. При $n = 0$ маємо неоднорідне лінійне рівняння (1.56), при $n = 1$ маємо

$$\frac{dy}{dx} + (P(x) - Q(x))y = 0$$

– однорідне лінійне диференціальне рівняння. Отже, надалі будемо припускати $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Метод розв'язування. Поділимо обидві частини рівняння (1.65) на y^n (поклавши $y \neq 0$), одержимо

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x). \quad (1.66)$$

Перший член з точністю до постійного коефіцієнта дорівнює похідної від множника при $P(x)$, тобто від y^{-n+1} . Тому введемо нову функцію

$$z = y^{-n+1}, \quad (1.67)$$

тоді

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n} \frac{dy}{dx}. \quad (1.68)$$

З урахуванням (1.67), (1.68), рівняння (1.66) перепишеться у вигляді

$$\frac{y^{-n}}{(-n+1)y^{-n}} \frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x).$$

Помноживши останнє рівняння на $(-n+1)$, одержимо лінійне неоднорідне рівняння відносно функції z

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)P(x)z = (-n+1)Q(x), \quad (1.69)$$

яке розв'язується одним з викладених вище методів.

Підставивши в загальний розв'язок рівняння (1.69) замість z вираз y^{-n+1} , одержимо загальний інтеграл рівняння Бернуллі. При $n > 0$ ми маємо ще розв'язок $y = 0$.

Приклад. Розв'язати рівняння $x \frac{dy}{dx} - 4y = x^2 \sqrt{y}$.

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} - 4 \frac{y}{x} = x \sqrt{y}.$$

Це рівняння Бернуллі. Тут $n = \frac{1}{2}$. Поділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{y}$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} \sqrt{y} = x.$$

Введемо нову функцію $z = \sqrt{y}$, тоді $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx}$. Після чого вихідне рівняння прийме

вигляд

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}.$$

Це лінійне неоднорідне рівняння щодо невідомої функції z . Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд (одержати самостійно)

$$z = x^2 \left(C_1 + \frac{1}{2} \ln x \right).$$

Тоді, повертаючись до функції y , одержимо загальний розв'язок вихідного рівняння у вигляді

$$y = x^4 \left(C_1 + \frac{1}{2} \ln x \right)^2.$$

Зауваження. При фактичному інтегруванні рівняння Бернуллі не обов'язково зводити його до виду (1.69), а досить застосувати до нього відразу підстановку (1.62), як і при розв'язанні лінійного рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння $y - xy' = y^2$.

Розв'язання. Дане рівняння можна переписати у вигляді $y' - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$. Для розв'язання цього рівняння скористаємося підстановкою (1.62), тобто

$$y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u.$$

Тоді вихідне рівняння прийме вигляд

$$u'v + v'u - \frac{uv}{x} = -\frac{u^2v^2}{x}.$$

Для визначення функції v , як і у випадку застосування методу Бернуллі до лінійних рівнянь, матимемо рівняння

$$v' - \frac{v}{x} = 0.$$

Звідси

$$v = x.$$

Функцію u визначимо з рівняння

$$u'v = -\frac{u^2 v^2}{x}.$$

Підставляючи сюди $v = x$, одержимо

$$u'x = -\frac{u^2 x^2}{x}$$

або, після інтегрування, остаточний вираз для функції u

$$u = \frac{1}{x - C}.$$

Тоді загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд

$$y = \frac{x}{x - C}.$$

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які рівняння називаються рівняннями з відокремлюваними змінними? Як інтегруються такі рівняння?

2. Які рівняння називаються однорідними? Метод розв'язування таких рівнянь?

3. Які рівняння зводяться до однорідних? Методи їхнього розв'язування?

4. Яке рівняння називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку? Його загальний вигляд? Чим відрізняється неоднорідне лінійне рівняння першого порядку від однорідного?

5. Методи інтегрування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку?

6. Який вигляд має рівняння Бернуллі? Які методи застосовують при розв'язуванні рівняння Бернуллі?

7. Розв'язати рівняння:

1) $x(1 + y^2) + y(1 + x^2) \frac{dy}{dx} = 0$, відповідь: $(1 + x^2)(1 + y^2) = C$.

2) $2x^2 yy' + y^2 = 2$, відповідь: $y^2 - 2 = Ce^{\frac{1}{x}}$.

3) $\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy$, відповідь: $\ln|x| = C + \sqrt{y^2 + 1}$, $x = 0$.

4) $y' = \cos(y - x)$, відповідь: $\operatorname{ctg} \frac{y - x}{2} = x + C$.

5) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 e^{\frac{-x}{y}}}{x^2}$, відповідь: $e^{\frac{x}{y}} + \ln|x| = C$.

6) $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$, відповідь: $Cx = \sin \frac{y}{x}$.

$$7) (y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0,$$

$$\text{відповідь: } x(y - x) = Cy, \quad y = 0.$$

$$8) 2x^3 y' = y(2x^2 - y^2),$$

$$\text{відповідь: } x = \pm y \sqrt{\ln Cx}, \quad y = 0.$$

$$9) y' = -\frac{2x - 4y + 6}{x + y - 3},$$

$$\text{відповідь: } (y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2,$$

$$y = x + 1.$$

$$10) x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0,$$

$$\text{відповідь: } (y - x + 2)^2 + 2x = C.$$

$$11) xy' - 2y = 2x^4,$$

$$\text{відповідь: } y = Cx^2 + x^4.$$

$$12) x^2 y' + xy + 1 = 0,$$

$$\text{відповідь: } xy = C - \ln|x|.$$

$$13) y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4,$$

$$\text{відповідь: } y = Ce^{x^2} + x^3.$$

$$14) xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y,$$

$$\text{відповідь: } y = x^4 \ln^2 Cx, \quad y = 0.$$

$$15) y' + 2y = y^2 e^x,$$

$$\text{відповідь: } y(e^x + Ce^{2x}) = 1, \quad y = 0.$$

8. Знайти частинні розв'язки рівнянь, що задовольняють початковим умовам:

$$1) y' \operatorname{ctg} x + y = 2, \quad y(0) = -1;$$

$$\text{відповідь: } y = 2 - 3 \cos x.$$

$$2) (x + 2y)y' = 1, \quad y(0) = -1;$$

$$\text{відповідь: } x + 2y + 2 = 0.$$

$$3) y' = y \operatorname{tg} x + 2 \sin x, \quad y(0) = -1;$$

$$\text{відповідь: } y = -\cos x.$$

1.4. Рівняння Ріккати

У протилежність раніше розглянутим типам диференціальних рівнянь першого порядку, у даному випадку розв'язок рівняння не може бути взагалі виражений у квадратурах. Проте, ми будемо говорити про розв'язок цього рівняння, як про існуючий, тому що надалі буде сформульована теорема про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння.

Загальне рівняння Ріккати має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \quad (1.70)$$

тобто рівняння, яке розв'язано відносно похідної, а права частина якого, є квадратична функція y , де $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ – неперервні функції в інтервалі $-\infty \leq x \leq \infty$. Крім того, $P(x) \neq 0$ і $R(x) \neq 0$ у цьому інтервалі, оскільки тоді рівняння (1.70) при $P(x) = 0$ буде лінійним, а при $R(x) = 0$ – рівнянням Бернуллі.

Серед рівнянь, розв'язок яких не визначається за допомогою квадратур, рівняння Ріккати відрізняється тим, що для нього має місце наступна теорема:

Теорема. Якщо відомий один частинний розв'язок рівняння Ріккаті, загальний розв'язок визначається двома квадратурами.

Доведення. Справді, нехай $y_1 = y_1(x)$ є частинний розв'язок рівняння (1.70), тобто ми маємо

$$y_1' = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x). \quad (1.71)$$

Робимо заміну змінної

$$y = y_1 + z, \quad (1.72)$$

де z – нова невідома функція. З (1.70) одержуємо

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} = P(x)y_1^2 + 2P(x)y_1z + P(x)z^2 + Q(x)y_1 + Q(x)z + R(x),$$

або, в силу тотожності (1.71)

$$\frac{dz}{dx} = P(x)z^2 + (2P(x)y_1 + Q(x))z. \quad (1.73)$$

Маємо рівняння Бернуллі, яке, як ми вже знаємо, зводиться до лінійного рівняння й інтегрується двома квадратурами. *Що і треба було довести.*

Для зведення рівняння (1.73) до лінійного, варто покласти

$$z = \frac{1}{u}. \quad (1.74)$$

Підставляючи (1.74) у (1.73), будемо мати лінійне рівняння щодо функції u у вигляді

$$\frac{du}{dx} + (2P(x)y_1 + Q(x))u = -P(x).$$

Його загальний розв'язок згідно (1.60) має вигляд

$$u = C\varphi(x) + \psi(x),$$

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ – деякі функції. Звідси, використовуючи (1.72) ми одержимо формулу для загального розв'язку рівняння (1.70)

$$y = y_1 + \frac{1}{C\varphi(x) + \psi(x)} = \frac{Cy_1\varphi(x) + y_1\psi(x) + 1}{C\varphi(x) + \psi(x)}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння Ріккаті є дрібно-лінійна функція від довільної сталої. Вірно і зворотне, що кожна дрібно-лінійна функція довільної сталої є розв'язком деякого рівняння Ріккаті.

Метод розв'язування. Таким чином, для того, щоб знайти загальний розв'язок рівняння Ріккаті загального виду необхідно:

- 1) знати частинний розв'язок (якщо він невідомий, то знайти його за видом правої частини або підбором);
- 2) представити розв'язок рівняння (1.70) у вигляді (1.72), що приводить рівняння Ріккаті до рівняння Бернуллі;

- 3) ввести заміну (1.74), що у свою чергу зводить наявне вже рівняння Бернуллі до лінійного рівняння відносно u ;
- 4) знайти загальний розв'язок одержаного лінійного рівняння і перейти до змінних x і y .

Зауваження. На практиці, при інтегруванні рівняння Ріккати загального виду, необов'язково зводити його до лінійного диференціального рівняння першого порядку, а досить звести його до рівняння Бернуллі. Потім знайти загальний розв'язок цього рівняння Бернуллі і перейти до старих змінних.

Приклад. Розв'язати рівняння $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$.

Розв'язання. 1. Знайдемо частинний розв'язок рівняння $3y' + y^2 = -\frac{2}{x^2}$. У лівій частині будуть члени, подібні до членів правої частини, якщо взяти $y = \frac{a}{x}$ (тому що $y' = -\frac{a}{x^2}$). Підставляючи $y = \frac{a}{x}$ у вихідне рівняння і дорівнюючи коефіцієнти при подібних членах, знайдемо a . Отже,

$$-\frac{3a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} = -\frac{2}{x^2},$$

звідси

$$-\frac{2}{x^2} + \frac{3a}{x^2} - \frac{a^2}{x^2} = 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a_1 = 1, \quad a_2 = 2.$$

Таким чином, маємо

$$y_1 = \frac{1}{x}, \quad y_2 = \frac{2}{x}.$$

Нам досить мати один частинний розв'язок. Тому виберемо одне із одержаних, наприклад, $y_1 = \frac{1}{x}$.

2. Представимо загальний розв'язок у вигляді $y = y_1 + z$ або $y = \frac{1}{x} + z$, тоді, підставляючи його у вихідне рівняння, одержимо

$$-\frac{3}{x^2} + 3z' + \frac{1}{x^2} + \frac{2z}{x} + z^2 + \frac{2}{x^2} = 0,$$

$$3z' + \frac{2z}{x} = -z^2.$$

Це є рівняння Бернуллі.

3. Розв'язуємо рівняння Бернуллі. Робимо заміну $z = \frac{1}{u}$, одержимо

$$-3\frac{1}{u^2}u' + \frac{2}{xu} = -\frac{1}{u^2}, \text{ або } u' - \frac{2u}{3x} = \frac{1}{3},$$

тобто лінійне рівняння щодо невідомої функції u .

4. Розв'язуючи, одержане лінійне рівняння, одним з відомих уже методів, можемо записати його загальний розв'язок у вигляді (одержати самостійно)

$$u = x^{\frac{2}{3}} \left(4x^{\frac{1}{3}} + C_1 \right).$$

Переходимо до x і y :

$$\frac{1}{z} = x^{\frac{2}{3}} \left(4x^{\frac{1}{3}} + C_1 \right) \Rightarrow z = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} \left(4x^{\frac{1}{3}} + C_1 \right)},$$

тоді

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{4x + C_1 x^{\frac{2}{3}}} = \frac{4x + C_1 x^{\frac{2}{3}} + x}{4x^2 + C_1 x^{\frac{5}{3}}}$$

або, остаточно

$$y = \frac{5x + C_1 x^{\frac{2}{3}}}{4x^2 + C_1 x^{\frac{5}{3}}}.$$

Оскільки рівняння Ріккаті зводиться до лінійного рівняння, то властивості розв'язків лінійного рівняння використовуються для побудови загального розв'язку рівняння Ріккаті. Дійсно, якщо маємо два частинних розв'язки рівняння (1.70), то з (1.72) і (1.74) випливає, що для відповідного лінійного рівняння відомий один частинний розв'язок, тому загальний розв'язок лінійного рівняння, або ж рівняння Ріккаті, знаходимо за допомогою однієї квадратури.

Зауваження. На практиці можна відразу застосовувати підстановку

$$y = y_1 + \frac{1}{u},$$

за допомогою якої рівняння Ріккаті безпосередньо зводиться до лінійного рівняння.

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який вигляд має загальне рівняння Ріккаті?
2. Що являє собою загальний розв'язок рівняння Ріккаті?
3. У якому випадку загальний розв'язок рівняння Ріккаті знаходиться за допомогою двох квадратур?
4. У чому полягає метод інтегрування рівняння Ріккаті?
5. Чи можна загальний розв'язок рівняння Ріккаті одержати за допомогою однієї квадратури?
6. За допомогою якої підстановки рівняння Ріккаті можна безпосередньо звести до лінійного рівняння?
7. Розв'язати рівняння (знайти загальний розв'язок):

а) $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$, $y = \frac{2}{x}$ – частинний розв'язок;

відповідь: $y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}$;

б) $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$, $y = x + 2$ – частинний розв'язок;

відповідь: $y = x + 2 + \frac{4}{Ce^{4x} - 1}$;

в) $y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$, відповідь: $y = \frac{2Cx^3 + 1}{(Cx^3 - 1)x}$.

1.5. Рівняння у повних диференціалах. Інтегруючий множник

Рівняння у повних диференціалах. Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку у диференціальній формі

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (1.75)$$

Означення. Рівняння (1.75) називають рівнянням у повних диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u = u(x, y)$, тобто

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \equiv du \equiv \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Ця тотожність рівносильна двом іншим

$$M(x, y) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N(x, y) \equiv \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.76)$$

Якщо ці умови виконані, то одержимо загальний інтеграл рівняння у повних диференціалах

$$u(x, y) = C. \quad (1.77)$$

Визначимо умову, за допомогою якої, встановлюють, чи є дане диференціальне рівняння рівнянням у повних диференціалах чи ні.

Теорема. Нехай неперервні функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$, коефіцієнти рівняння (1.75), в області його визначення D мають неперервні частинні похідні $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}$ і $\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$. Для того, щоб диференціальне рівняння (1.75) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб у області D виконувалася умова

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (1.78)$$

Доведення. Необхідність випливає з умов (1.76) після їхнього диференціювання: першого – по y , другого – по x і застосування теореми про рівність змішаних похідних.

Достатність буде доведена, якщо з умови (1.78) знайдемо функцію $u(x, y)$, що задовольняє умови (1.76). Для цього, перше з рівнянь (1.76) проінтегруємо по x у межах від x_0 до x , вважаючи y сталою,

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y). \quad (1.79)$$

Далі покажемо, що коли виконується умова (1.78), то в рівнянні (1.79) можна підібрати функцію $\varphi(y)$ так, щоб виконувалося і друге співвідношення в (1.76). Диференціюючи (1.79) по y , одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx + \varphi'(y)$$

або, використовуючи умову (1.78),

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y).$$

Звідси одержимо, що для виконання другої з умов (1.76) варто взяти

$$\varphi'(y) = N(x_0, y),$$

звідки

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy.$$

Таким чином, функція $u(x, y)$ знайдена. Дорівнюючи її довільній сталій, будемо мати загальний інтеграл рівняння (1.75)

$$u(x, y) \equiv \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C.$$

Що і треба було довести.

Викладене доведення достатності умови (1.78) дає, разом з тим, і спосіб визначення функції $u(x, y)$, тобто метод розв'язування рівняння у повних диференціалах. Як це можна зробити за допомогою невизначеного інтеграла, розглянемо на прикладі.

Приклад. Розв'язати рівняння $y' = \frac{2xy + 3y^2}{2y - 6xy - x^2}$.

Розв'язання. Це рівняння не належить до жодного, з вивчених у попередніх параграфах, типів. Запишемо його у диференціальній формі

$$(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 2y)dy = 0,$$

тоді

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2x + 6y,$$

тобто виконується умова (1.78). Дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Отже, існує функція $u(x, y)$, що задовольняє умови

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 6xy - 2y.$$

Інтегруючи, перше рівняння по x , одержимо

$$u(x, y) = \int (2xy + 3y^2)dx + \varphi(y) = x^2y + 3y^2x + \varphi(y).$$

Диференціюючи останній вираз по y , матимемо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 6yx + \varphi'(y).$$

Дорівнюючи тепер два вирази для $\frac{\partial u}{\partial y}$, дістанемо

$$x^2 + 6xy - 2y = x^2 + 6yx + \varphi'(y),$$

звідси

$$\varphi'(y) = -2y \Rightarrow \varphi(y) = -y^2 + C.$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння буде мати вигляд

$$x^2y + 3y^2x - y^2 = C.$$

Таким чином, на практиці виявляється зручніше диференціювати (1.79) по y і, замінюючи $\frac{\partial u}{\partial y}$ відомою функцією $N(x, y)$, визначити з одержаної рівності $\varphi'(y)$, а потім знайти $\varphi(y)$ квадратурою.

Інтегруючий множник. Якщо ліва частина рівняння (1.75) не є повним диференціалом деякої функції, то виникає питання – чи можна знайти таку функцію $\mu = \mu(x, y)$, щоб, помноживши на неї ліву частину рівняння (1.75), перетворити її у повний диференціал.

Означення. Множник μ такий, що вираз

$$\mu(x, y)[M(x, y)dx + N(x, y)dy],$$

є повним диференціалом деякої функції, називається інтегруючим множником.

Розглянемо властивості інтегруючого множника.

1. Якщо для рівняння (1.75) існує загальний інтеграл (1.77), то для цього рівняння існує інтегруючий множник.

Доведення. Дійсно, диференціюючи (1.77), одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0,$$

або

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u'_x}{u'_y},$$

але з рівняння (1.75)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}.$$

Отже,

$$-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

звідси

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M(x, y)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{N(x, y)}.$$

Дорівнюючи ці відношення до $\mu(x, y)$, матимемо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu(x, y)M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mu(x, y)N(x, y).$$

А це означає, що $\mu(x, y)$ є інтегруючий множник, тобто його існування в цьому випадку доведено.

2. Число інтегруючих множників рівняння (1.75) нескінченно.

Доведення. Справді, нехай $\mu = \mu(x, y)$ є який-небудь інтегруючий множник рівняння (1.75), а $u(x, y) = C$ є загальний інтеграл цього рівняння. Тоді $\mu_1 = \varphi(u)\mu$, де $\varphi(u)$ – довільна диференційовна функція, є також інтегруючим множником.

Дійсно, вираз

$$\mu_1[M(x, y)dx + N(x, y)dy] = \varphi(u)\mu[M(x, y)dx + N(x, y)dy] = \varphi(u)du$$

є повним диференціалом від функції

$$\Phi(u) = \int \varphi(u)du.$$

Отже,

$$\mu_1 = \varphi(u)\mu, \tag{1.80}$$

є інтегруючий множник рівняння (1.75).

Такий процес можна продовжити до нескінченності і за допомогою метода математичної індукції показати, що всякий інтегруючий множник рівняння (1.75) дається формулою (1.80).

Висновок. Якщо відомі два інтегруючих множники μ і μ_1 , відношення яких не є стала, то загальний інтеграл рівняння (1.75) знаходимо у вигляді

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \varphi(u) = C.$$

Визначення інтегруючого множника. Із означення інтегруючого множника маємо

$$\frac{\partial[\mu M(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu N(x, y)]}{\partial x}$$

або

$$N(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} - M(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) \mu, \quad (1.81)$$

Поділивши обидві частини рівності (1.81) на μ , матимемо

$$N(x, y) \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M(x, y) \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (1.82)$$

Ми одержали рівняння у частинних похідних для визначення невідомої функції μ , інтегрування якого, є досить складна задача. Тому розглянемо лише випадки, коли вдається знайти його деякі розв'язки відносно просто.

1. Розглянемо, наприклад, випадок, коли існує інтегруючий множник, який залежить тільки від x , тобто $\mu = \mu(x)$. У цьому випадку $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ і рівняння (1.82) перепишеться у вигляді

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)}. \quad (1.83)$$

Для існування інтегруючого множника, який залежить тільки від x , необхідно і достатньо, щоб права частина рівняння (1.83), залежала тільки від x , тоді $\mu(x)$ знаходиться однією квадратурою і має вигляд

$$\mu(x) = C e^{\int \varphi(x) dx}, \quad \varphi(x) = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)}.$$

Можна вважати $C = 1$, тому, що досить мати лише один інтегруючий множник.

Приклад. Знайти інтегруючий множник рівняння

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$$

Розв'язання. У даному разі

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1.$$

Отже, з (1.83)

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = 1, \quad \mu = e^x.$$

2. У тому випадку, коли інтегруючий множник залежить тільки від y , тобто $\mu = \mu(y)$, рівняння (1.82) має вигляд

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{-M(x,y)}.$$

Міркуючи аналогічно попередньому випадку, для інтегруючого множника, одержимо

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y) dy}, \quad \psi(y) = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{-M(x,y)}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $xy' = (3x^2 \cos y - \sin y) \cos y$, якщо відомо, що воно має інтегруючий множник як функцію однієї змінної x або y .

Розв'язання. Представимо дане рівняння у вигляді

$$(3x^2 \cos y - \sin y) \cos y dx - x dy = 0 \quad (1.84)$$

і обчислимо значення виразу

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} &= \frac{-3x^2 \cos y \sin y - \cos 2y + 1}{-3x^2 \cos y \sin y - \cos 2y + 1} = \\ &= -2(3x^2 \cos y - \sin y) \sin y. \end{aligned}$$

Якщо одержаний вираз поділимо на $-(3x^2 \cos y - \sin y) \cos y = -M(x,y)$, то частка виявиться функцією тільки від y ; отже, інтегруючий множник μ є функція від y . Знайдемо його з рівняння

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} &= \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{-M(x,y)} = 2 \operatorname{tg} y; \quad \frac{d\mu}{\mu} = 2 \operatorname{tg} y dy, \\ \int \frac{d\mu}{\mu} &= 2 \int \operatorname{tg} y dy, \quad \ln |\mu| = -2 \ln |\cos y| + \ln |C|. \end{aligned}$$

Як інтегруючий множник візьмемо $\mu(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$. Множачи обидві частини рівняння (1.84) на $\frac{1}{\cos^2 y}$, одержимо рівняння у повних диференціалах

$$(3x^2 - \operatorname{tg} y)dx - \frac{x}{\cos^2 y} dy = 0.$$

Розв'яжемо його

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - \operatorname{tg} y, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{x}{\cos^2 y}, \\ u(x, y) &= \int (3x^2 - \operatorname{tg} y) dx = x^3 - x \operatorname{tg} y + \varphi(y), \\ \frac{\partial}{\partial y} (x^3 - x \operatorname{tg} y + \varphi(y)) &= -\frac{x}{\cos^2 y}, & -\frac{x}{\cos^2 y} + \varphi'(y) &= -\frac{x}{\cos^2 y}, \\ \varphi'(y) &= 0, & \varphi(y) &= \operatorname{const} = C.\end{aligned}$$

Отже, $u(x, y) = x^3 - x \operatorname{tg} y$, $x^3 - x \operatorname{tg} y = C$. Відзначимо, що при діленні вихідного рівняння на $\cos^2 y$ були загублені розв'язки $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. У більш загальному випадку, коли інтегруючий множник є функцією відомої функції, тобто $\mu = \mu(z)$, а $z = z(x, y)$ – відома функція, то рівняння (1.82) має вигляд

$$\frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} - M(x, y) \frac{\partial z}{\partial y}}.$$

Звідси

$$\mu(z) = e^{\int \xi(z) dz}, \quad \xi(z) = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} - M(x, y) \frac{\partial z}{\partial y}}.$$

На практиці для визначення інтегруючого множника часто застосовується такий прийом: усі члени рівняння розбиваються на дві групи, для кожної з яких було б легко побачити один інтегруючий множник; потім пишуть вираз найбільш загального інтегруючого множника для кожної групи і дивляться, чи можна вибрати довільні функції, що входять у цей вираз так, щоб обидва інтегруючих множника виявилися рівними; якщо це виявляється можливим, то інтегруючий множник рівняння знайдений.

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яке рівняння називається рівнянням у повних диференціалах?

2. Яка необхідна і достатня умова того, щоб диференціальне рівняння було рівнянням у повних диференціалах?

3. Метод інтегрування рівняння у повних диференціалах?

4. Який множник називається інтегруючим? Властивості інтегруючого множника?

5. У яких випадках вдається відносно просто знайти інтегруючий множник? Який вигляд вони мають?

6. Розв'язати рівняння:

а) $(2x + 3y^2 + 2yx)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0,$

відповідь: $3xy^2 + x^2y + 3y + x^2 = C;$

б) $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0,$

відповідь: $y = x^2 - \left[\frac{3}{2}(C - x^2) \right]^{\frac{2}{3}};$

в) $\left(1 - \frac{x}{y}\right)dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0,$

відповідь: $\ln|x| + \ln|y| + y^2 - \frac{x}{y} = C;$

г) $(y - \sin x)dx + (x + 1)dy = 0,$ відповідь: $(x + 1)y + \cos x = C;$

д) $\frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0,$ відповідь: $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C;$

е) $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0,$ відповідь: $x^2 + xy + y^2 = C;$

ж) $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0,$ відповідь: $xe^{-y} - y^2 = C;$

з) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0,$ відповідь: $3x^2y - y^3 = C;$

і) $y^2dx + (e^x - y)dy = 0,$ відповідь: $\ln|y| - ye^{-x} = C, y = 0;$

к) $(x^2 - y^2 + y)dx + x(2y - 1)dy = 0,$

відповідь: $x^2 + y^2 = y + Cx, x = 0.$

1.6. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку

Однією з найважливіших задач у теорії диференціальних рівнянь є задача Коші, що для диференціального рівняння першого порядку (1.21) формулюється так: серед усіх розв'язків диференціального рівняння (1.21) знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який при заданому значенні незалежної змінної $x = x_0$ дорівнює заданому значенню y_0 , тобто задовольняє умові (1.22).

У попередніх параграфах ми вже зустрічалися з задачею Коші при розв'язанні конкретних прикладів, коли розглядали різні типи диференціальних рівнянь першого порядку, що інтегруються в квадратурах. Ці рівняння мали розв'язки, були зазначені методи їх визначення. При певних обмеженнях, що накладаються на ці рівняння, можна було зтверджувати, що розв'язок з заданими початковими умовами існує і єдиний. Однак розглянутими рівняннями далеко не вичерпуються різні рівняння першого порядку. Як бути, наприклад, з таким простим рівнянням, як $y' = x^2 + y^2$? Або із загальним рівнянням Ріккаті, для якого доведено, що його розв'язок в загальному випадку не може бути виражений в квадратурах. Чи значить це, що зазначені рівняння не мають розв'язків? Зовсім ні, ці рівняння, як і багато інших, більш складних, як буде показано, розв'язок мають; але зтверджувати, що ці розв'язки виражаються через елементарні функції, ми не можемо. Навпаки, у ряді випадків відомо, що таке представлення розв'язку неможливо. Отже, диференціальні рівняння, взагалі кажучи, своїми розв'язками мають функції більш складної природи, чим інтеграли від елементарних функцій. Проте впевненість у їхньому існуванні дасть нам право застосовувати для їхнього обчислення методи наближеного інтегрування рівнянь.

Відповіді на ці і багато інших питань дає наступна фундаментальна теорема.

Нехай маємо диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y), \quad (1.85)$$

і початкову умову

$$y(x_0) = y_0. \quad (1.86)$$

Тоді справджується така теорема.

Теорема (Коші). Якщо функція $f(x, y)$ задовольняє умовам:

1) є неперервною в замкненому прямокутнику $R: \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a; y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$, де a і b – деякі відомі додатні числа, а отже, є обмеженою в прямокутнику R , тобто існує число $M > 0$ таке, що для всіх точок $(x, y) \in R$

$$|f(x, y)| \leq M; \quad (1.87)$$

2) задовольняє умові Ліпшиця у прямокутнику R по змінній y

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad (1.88)$$

де L – стала Ліпшиця, а $(x, y_1), (x, y_2)$ – довільні точки з прямокутника R ;

то на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, де $h = \min\left(a; \frac{b}{M}\right)$ (менше з чисел a і

$\frac{b}{M}$), існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння (1.85),

який при $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ не виходить з прямокутника R і задовольняє початкову умову (1.86), тобто $y(x_0) = y_0$.

Доведення. Доводитемо теорему методом Пікара. Побудуємо інтегральне рівняння виду:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (1.89)$$

Рівняння, в якому невідома функція знаходиться під знаком інтеграла, називають *інтегральним*. Легко побачити, що коли рівняння (1.89) має неперервний розв'язок $y = y(x)$ (неперервну функцію, яка задовольняє це рівняння) на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, то цей розв'язок є розв'язком також диференціального рівняння (1.85) і задовольняє початкову умову (1.86).

Справді, диференціюючи по x ліву і праву частини тотожності (1.89), маємо

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Отже, функція $y(x)$ задовольняє диференціальне рівняння (1.85). Підставивши в ліву і праву частини (1.89) значення $x = x_0$, дістанемо $y(x_0) = y_0$, тобто функція $y = y(x)$ задовольняє й початкову умову (1.86).

Справедливим є і обернене твердження: якщо функція $y = y(x)$ на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$ є розв'язком диференціального рівняння (1.85) і $y(x_0) = y_0$, то функція $y = y(x)$ на цьому ж відрізку є розв'язком інтегрального рівняння (1.89).

Справді, якщо $y(x)$ є розв'язком рівняння (1.85), то при $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ виконуються тотожність

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)) \quad (1.90)$$

і рівність (1.86).

Проінтегрувавши обидві частини тотожності (1.90) у границях від x_0 , до x і врахувавши (1.86), матимемо

$$\int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

або

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt,$$

що й треба було довести.

При цьому говорять, що інтегральне рівняння (1.89) еквівалентне диференціальному рівнянню (1.85) з початковою умовою (1.86). Тому далі доведемо існування і єдиність розв'язку для інтегрального рівняння (1.89).

Для цього застосуємо метод послідовних наближень (метод Пікара).

Побудуємо послідовність функцій $y_0(x)$, $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$, ..., де $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$, таким чином:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0, \\ y_1(x) &= y_0(x) + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt, \\ y_2(x) &= y_0(x) + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt, \dots, \\ y_n(x) &= y_0(x) + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \dots \end{aligned} \quad (1.91)$$

Відносно цих функцій можна стверджувати, що

1) при $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ вони є неперервними. Справді, оскільки за умовою функція $f(x, y(x))$ у прямокутнику R неперервна, то й інтеграл

$\int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$, будучи функцією верхньої змінної межі, є неперервною функцією;

2) кожна функція $y_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n, \dots$, є визначеною при $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ і не виходить з прямокутника R . Справді, з (1.91) маємо

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_0(t))| dt \right| \leq M |x - x_0| \leq Mh \leq b. \end{aligned}$$

Отже, функція $y_1(x)$ не виходить за межі прямокутника R , функція $y_0(x) \equiv y_0$ знаходиться в центрі R (рис. 1.7).

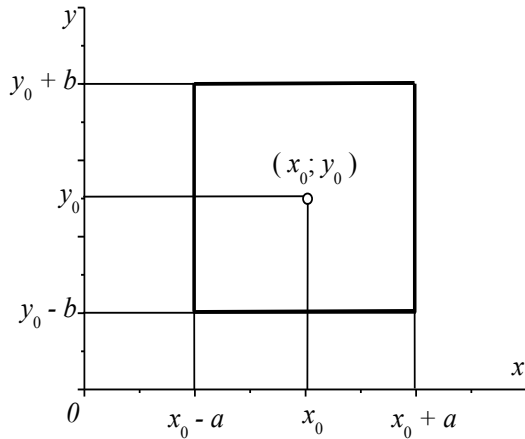


Рис. 1.7

Далі знаходимо

$$|y_2(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t))| dt \right| \leq$$

$$\leq M |x - x_0| \leq Mh \leq b, \dots,$$

$$|y_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_{n-1}(t))| dt \right| \leq M |x - x_0| \leq Mh \leq b, \dots$$

За методом математичної індукції дістаємо твердження, що доводили;

3) кожна з функцій $y_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n, \dots$, задовольняє початкову умову $y_k(x_0) = y_0$. Це випливає безпосередньо з формул (1.91).

Доведемо, що послідовність наближень (функцій) (1.91) збігається рівномірно для всіх $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ або для всіх x , для яких $|x - x_0| \leq h$. Розглянемо функціональний ряд

$$y_0 + (y_1(x) - y_0) + (y_2(x) - y_1(x)) + \dots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \dots \quad (1.92)$$

Звідси видно, що k -та частинна сума ряду (1.92) збігається з k -м наближенням послідовності функцій (1.91). Тому з рівномірної збіжності ряду (1.92) випливає рівномірна збіжність послідовності наближень (1.91). Знайдемо оцінку за модулем кожного члена ряду (1.92), починаючи з другого:

$$|y_1(x) - y_0| \leq M |x - x_0|,$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| \int_{x_0}^x (f(t, y_1(t)) - f(t, y_0)) dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_0)| dt \right|.$$

Застосувавши до $|f(t, y_1(t)) - f(t, y_0)|$ умову Ліпшиця і врахувавши оцінку попереднього члена ряду, дістанемо

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &\leq L \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_0| dt \leq \\ &\leq M \int_{x_0}^x |t - x_0| dt = LM \frac{|x - x_0|^2}{2!}. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} |y_3(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))| dt \right| \leq \\ &\leq L \int_{x_0}^x |y_2(t) - y_1(t)| dt \leq L^2 M \int_{x_0}^x \frac{|t - x_0|^2}{2!} dt = \\ &= \frac{L^2 M}{3!} |x - x_0|^3. \end{aligned}$$

Застосувавши метод математичної індукції, доводимо справедливість такої оцінки

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{L^{n-1} M}{n!} |x - x_0|^n. \quad (1.93)$$

Оскільки $|x - x_0| < h$, то

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0| &\leq Mh, \\ |y_2(x) - y_1(x)| &\leq ML \frac{h^2}{2!}, \\ |y_3(x) - y_2(x)| &\leq ML^2 \frac{h^3}{3!}, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq ML^{n-1} \frac{h^n}{n!},$$

Отже, члени функціонального ряду (1.92) за модулем менші, ніж відповідні члени додатного числового ряду

$$y_0 + Mh + ML \frac{h^2}{2!} + ML^2 \frac{h^3}{3!} + \dots + ML^{n-1} \frac{h^n}{n!} + \dots \quad (1.94)$$

Застосуємо до останнього ряду ознаку д'Аламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ML^{n-1} h^n (n-1)!}{ML^{n-2} h^{n-1} n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Lh}{n} = 0 < 1.$$

Отже, числовий ряд (1.94) збігається. Тому функціональний ряд (1.92) за ознакою Вейєрштраса рівномірно збігається на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$.

Нехай

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = Y(x).$$

Згідно з доведеним функція $Y(x)$ є неперервною на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$.

Доведемо, що $Y(x)$ задовольняє початкову умову $Y(x_0) = y_0$ і не виходить з прямокутника R .

Справді,

$$Y(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_0 = y_0.$$

Перейшовши при $n \rightarrow \infty$ до границі в нерівності $|y_n(x) - y_0| \leq b$, дістаємо $|Y(x) - y_0| \leq b$. Доведемо тепер, що $Y(x)$ є розв'язком рівняння (1.89).

Оскільки послідовність функцій $y_n(x)$ рівномірно збігається до $Y(x)$ на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що при $n > N$ і всіх $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ виконуватиметься нерівність

$$|y_n(x) - Y(x)| < \varepsilon.$$

Тому, використавши умову Ліпшиця, матимемо

$$\left| \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) - f(t, Y(t)) dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x L |y_n(t) - Y(t)| dt \right| \leq L \varepsilon |x - x_0| \leq L \varepsilon h \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) dt$$

для всіх $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$.

Перейшовши при $n \rightarrow \infty$ до границі в співвідношенні

$$y_n(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt,$$

дістанемо

$$Y(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) dt.$$

Цим самим доведено, що функція $y = Y(x)$ на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$ є розв'язком інтегрального рівняння (1.89), а отже, і розв'язком диференціального рівняння (1.85), який задовольняє початковій умові (1.86).

Доведемо єдиність розв'язку $y = Y(x)$. Нехай на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, крім розв'язку $Y(x)$, існує ще інший розв'язок $\varphi(x)$ такий, що $\varphi(x_0) = y_0$. Розглянемо досить малий відрізок $[x_0; x_0 + \eta]$ $\eta \leq h$, на якому $\varphi(x) - Y(x) \neq 0$. Оскільки функція $|\varphi(x) - Y(x)| \neq 0$ є неперервною на відрізку $[x_0; x_0 + \eta]$, то $\theta(x) = |\varphi(x) - Y(x)|$ досягає в деякій точці x_1 , $x_0 < x_1 \leq x_0 + \eta$ свого найбільшого значення $m > 0$.

Тоді

$$m = |\varphi(x_1) - Y(x_1)| = \left| \int_{x_0}^{x_1} f(t, \varphi(t)) dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t, Y(t)) dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x_1} |f(t, \varphi(t)) - f(t, Y(t))| dt \right| \leq L \int_{x_0}^{x_1} |\varphi(t) - Y(t)| dt.$$

Розповсюдивши інтегрування на відрізок $[x_0; x_0 + \eta]$, матимемо

$$m \leq L \int_{x_0}^{x_0+\eta} |\varphi(t) - Y(t)| dt < Lm\eta.$$

Звідси $1 < L\eta$, що неможливо, оскільки число η може бути вибраним як завгодно малим. Зайшли у суперечність. Тому на відрізку $[x_0; x_0 + \eta]$

$$\varphi(x) \equiv Y(x).$$

Так само можна довести, що і на відрізку $[x_0 - \eta; x_0]$ ці функції збігаються. *Теорему доведено.*

Зазначимо, що на практиці умову Ліпшиця в теоремі Коші перевіряти досить складно. Тому користуються іншою ознакою, яку дає така теорема.

Теорема. Якщо права частина в диференціальному рівнянні (1.85) у розглядуваній області має обмежену частинну похідну по y , $|f'_y(x, y)| \leq N$, то умова Ліпшиця для такої функції виконується.

Доведення. Розглянемо обмежену область D , у якій функція $f(x, y)$ має обмежену частинну похідну $f'_y(x, y)$, тобто

$$|f'_y(x, y)| \leq N.$$

Тоді за теоремою Лагранжа про скінчений приріст маємо

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f'_y(x, y_1 + \theta(y_1 - y_2))(y_1 - y_2), \quad 0 < \theta < 1.$$

Якщо $|f'_y| \leq N$, то

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|.$$

Теорему доведено.

Приклад. Знайти область існування і єдиності розв'язків диференціального рівняння

$$y' = y \sin x + e^x.$$

Розв'язання. Оскільки права частина заданого рівняння є неперервною функцією в усій дійсній площині, а $|f'_y| = |\sin x| \leq 1$, то у будь-якому прямокутнику площини xOy виконуються умови теореми Коші. Тому через кожну точку площини проходить лише одна інтегральна крива розглядуваного рівняння.

Приклад. Знайти область єдиності розв'язку рівняння

$$y' = \sqrt{y}. \quad (1.95)$$

Розв'язання. Права частина заданого рівняння визначена і неперервна при $y \geq 0$, тобто у верхній частині площини xOy . Оскільки частинна похідна

$$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

стає необмеженою при $y \rightarrow 0$, $y > 0$, то в точках прямої $y = 0$ умова Ліпшиця може не виконуватися. Отже, через ці точки може проходити більше ніж один розв'язок (одна інтегральна крива). Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що функція $y = 0$ є

розв'язком рівняння (1.95). Проінтегрувавши це рівняння, знаходимо його загальний розв'язок

$$y = \frac{1}{4}(x+C)^2, \quad x \geq -C \quad (1.96)$$

який є сім'єю квадратичних парабол (рис. 1.8). Через кожну точку осі Ox проходить два розв'язки (дві інтегральні криві), а саме вісь Ox , тобто розв'язок $y = 0$ і одна крива із сім'ї інтегральних кривих (1.96). У решті точок верхньої площини, де $y > 0$, виконуються обидві умови теореми Коші. Тому через кожну таку точку проходить лише один розв'язок (інтегральна крива) диференціального рівняння (1.95).

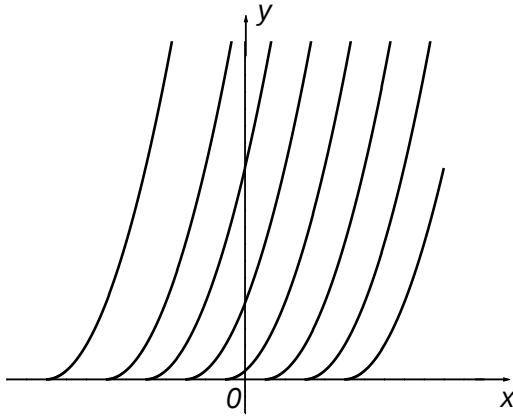


Рис. 1.8

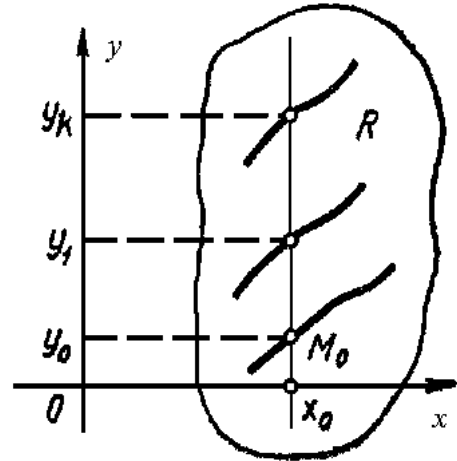


Рис. 1.9

Розв'язок $y = y(x)$, у кожній точці якого порушується вимога єдиності розв'язку задачі Коші, називають *особливим розв'язком*, його не можна дістати з формули загального розв'язку при конкретному значенні довільної сталої. У розглянутому вище прикладі особливим розв'язком рівняння (1.95) є $y = 0$.

Щоб знайти особливий розв'язок рівняння (1.85), треба знайти геометричне місце точок, в яких функція $f(x, y)$ неперервна, а $f'_y(x, y)$ необмежена, і перевірити, чи знайдено розв'язок рівняння, а також чи є цей розв'язок особливим.

Для диференціального рівняння першого порядку, не розв'язаного відносно похідної $F(x, y, y') = 0$, особливий розв'язок знаходимо, виключаючи y' із системи рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0. \end{cases} \quad (1.97)$$

Приклад. Знайти друге наближення до розв'язку диференціального рівняння

$$y' = x^2 + y^2 \quad (1.98)$$

з початковою умовою $y(0) = 1$.

Розв'язання. Скористаємося формулами (1.91), поклавши $n = 0, 1, 2$. Нульовим наближенням $y_0(x)$ є стала функція $y_0 = 1$. Будуємо перше і друге наближення:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_0^x f(t, y_0(t)) dt = 1 + \int_0^x (t^2 + 1) dt = \\ &= 1 + \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^x = 1 + x + \frac{1}{3} x^3; \\ y_2(x) &= y_0 + \int_0^x f(t, y_1(t)) dt = \\ &= 1 + \int_0^x \left(t^2 + \left(1 + t + \frac{1}{3} t^3 \right)^2 \right) dt = \\ &= 1 + \left(\frac{1}{3} t^3 + t + \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{63} t^7 + t^2 + \frac{1}{6} t^4 + \frac{2}{15} t^5 \right) \Big|_0^x = \\ &= 1 + x + x^2 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{6} x^4 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{1}{63} x^7. \end{aligned}$$

Геометричний зміст теореми Коші полягає в тому, що існує і при тому єдина функція $y = \varphi(x)$, графік якої проходить через точку (x_0, y_0) (рис. 1.9). Крім того, з теореми випливає, що рівняння (1.85) має нескінченне число різних розв'язків. Наприклад, розв'язок, графік якого проходить через точку (x_0, y_0) ; розв'язок, графік якого проходить через точку (x_0, y_1) , і т.д., якщо ці точки лежать в області R . Отже, надаючи y_0 різних значень у деякому проміжку, наприклад в інтервалі $\left(y_0 - \frac{b}{2}, y_0 + \frac{b}{2} \right)$, дістаємо різні частинні розв'язки рівняння (1.85). Якщо під y_0 , розуміти будь-яке його значення в заданому інтервалі, то матимемо загальний розв'язок. Отже, у формулі загального розв'язку

$$y = \varphi(x, C) \quad (1.99)$$

роль довільної сталої відіграє початкове значення y_0 шуканої функції $y(x)$ при деякому фіксованому значенні x_0 , аргументу x , так що формула (1.99) набирає вигляду $y = \varphi(x, x_0, y_0)$.

Таку форму запису загального розв'язку називають загальним розв'язком у формі Коші.

Наприклад, маємо рівняння $y' = ky$, $k = \text{const}$. Умови теореми Коші виконуються в довільній точці (x_0, y_0) деякої області D площини xOy .

Загальним розв'язком є функція $y = Ce^{kx}$. Якщо маємо початкові дані (1.86), то $y = Ce^{kx_0}$. Звідси $C = y_0 e^{-kx_0}$, і розв'язком є

$$y = y_0 e^{k(x-x_0)}. \quad (1.100)$$

Якщо x_0 зафіксувати, а y_0 вважати довільним, то розв'язок (1.100) є загальним розв'язком заданого рівняння у формі Коші.

Таким чином, із теореми Коші випливає існування і загального розв'язку диференціального рівняння (1.85). Він охоплюватиме усі частинні розв'язки і матиме один параметр y_0 , тобто одну довільну сталу. Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку має одну довільну сталу.

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як формулюється задача Коші для диференціального рівняння першого порядку розв'язаного відносно похідної?
2. В чому полягає умова Ліпшиця? Якою більш простішою умовою користуються замість умови Ліпшиця?
3. В чому полягає метод послідовних наближень?
4. Знайти найменше з чисел, що обмежують функцію

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2(2 - x - y)$$

в прямокутнику

$$D = \{(x, y) \mid |x - 1| \leq a, |y - 1| \leq b\}.$$

5. Перевірити, що функція $f(x, y) = y^2 \sin x + e^x$ в смугі

$$C = \{(x, y) \mid |x| \leq \infty, |y| \leq b\}$$

задовольняє умову Ліпшиця по y рівномірно по $x \in R$. Знайти найменшу сталу Ліпшиця.

6. Для рівнянь

$$y' = 2xy + y^2, \quad y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}, \quad y' = 1 + \operatorname{tg} y, \quad (y - x)y' = y \ln x$$

виділити область, через кожну точку якої проходить єдина інтегральна крива.

1.7. Особливі точки

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y). \quad (1.101)$$

Якщо функція $f(x, y)$ в околі деякої точки (x_0, y_0) задовольняє умови теореми Коші, то через точку (x_0, y_0) проходить тільки одна інтегральна крива рівняння (1.101).

Нехай в точці (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ не є неперервною. Тоді може бути, що

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$, де A – скінченне число;

2) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \infty$;

3) $f(x, y)$ не має ні скінченної, ні нескінченної границі в точці (x_0, y_0) .

Перших два випадки можуть бути зведені до випадків, що задовольняють умови теореми Коші. Справді, у першому випадку $f(x, y)$ можна довизначити до неперервної, у точці (x_0, y_0) . Для цього досить припустити, що $f(x_0, y_0) = A$. У другому випадку разом з рівнянням (1.101) розглядаємо рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \quad (1.102)$$

Поклавши $\frac{1}{f(x, y)} = 0$, дістанемо, що рівняння (1.102) має єдиний розв'язок $x = \varphi(y)$ з вертикальною дотичною у точці (x_0, y_0) .

У третьому випадку функція $f(x, y)$, а отже, і $\frac{1}{f(x, y)}$ у точці (x_0, y_0) не мають границі. Тоді точку (x_0, y_0) називають *ізолюваною особливою точкою* рівняння (1.101).

Дослідження ізолюваної особливої точки виконаємо на прикладі, використовуючи підхід Пуанкаре. Нехай маємо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + ky}, \quad (1.103)$$

де a, b, c, k – дійсні числа, $ak - bc \neq 0$. Якщо $ak - bc = 0$ то рівняння (1.103) вироджується у рівняння $y' = \text{const}$.

У точці $(0,0)$ права частина рівняння (1.103), тобто функція $f(x,y) = \frac{ax+by}{cx+ky}$ або функція $\frac{1}{f(x,y)}$ не мають границі, а це означає, що точка $(0,0)$ є ізольованою особливою для рівняння (1.103). Оскільки права частина рівняння (1.103) у довільному замкненому околі точки (x_0, y_0) , де $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, є неперервною функцією і задовольняє по змінній y або змінній x умову Ліпшиця, то через кожну точку проходить одна інтегральна крива рівняння (1.103). Дослідимо поведінку цих кривих поблизу особливої точки $(0,0)$. Інакше кажучи, з'ясуємо, як розміщуються інтегральні криві рівняння (1.103) поблизу точки $(0,0)$. Для цього запишемо рівняння (1.103) у вигляді

$$\frac{dy}{ax+by} = \frac{dx}{cx+ky}.$$

Введемо нову змінну t , диференціал якої задовольняє рівність

$$\frac{dy}{ax+by} = \frac{dx}{cx+ky} = dt.$$

Тоді

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = cx + ky, \\ \frac{dy}{dt} = ax + by. \end{cases} \quad (1.104)$$

Таким чином, замість рівняння (1.103) маємо систему двох рівнянь (1.104), яка при $cx+ky \neq 0$ еквівалентна вихідному рівнянню (1.103) у тому розумінні, що кожний розв'язок рівняння (1.103) є траєкторією системи (1.104) і, навпаки, будь-яка траєкторія системи (1.104), відмінна від точки спокою, є розв'язком рівняння (1.103).

Точка спокою системи є ізольована особлива точка типу $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ рівняння (1.103).

Якщо $cx+ky = 0$, а $ax+by \neq 0$, то система (1.104) еквівалентна оберненому рівнянню

$$\frac{dx}{dy} = \frac{cx+ky}{ax+by}.$$

Отже, замість рівняння (1.103) розглядатимемо в околі точки $(0,0)$ систему (1.104). Для цього запишемо систему (1.104) у векторно-матричній формі

$$\dot{\mathbf{Z}}_t = \mathbf{A} \mathbf{Z}, \quad (1.105)$$

де

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} c & k \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Розглянемо характеристичне рівняння матриці $\mathbf{A}$

$$\det\|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}\| = 0, \quad (1.106)$$

де $\mathbf{E}$ – одинична матриця. Розв'язуючи це рівняння, знаходимо

$$\lambda_{1,2} = \frac{b+c}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(b-c)^2 + 4ak} \quad (1.107)$$

Тоді залежно від значення коренів λ_1 і λ_2 окремо розглядатимемо два випадки: *перший* – λ_1 і λ_2 різні; *другий* – λ_1 і λ_2 рівні між собою.

Перший випадок. Розглянемо випадок простих коренів характеристичного рівняння. Як відомо, для матриці $\mathbf{A}$ можна знайти таку неособливу матрицю $\mathbf{T}$, що матриця

$$\mathbf{I} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1},$$

де $\mathbf{T}^{-1}$ – матриця, обернена до $\mathbf{T}$, має вигляд

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Нехай тепер у системі (1.105)

$$\mathbf{Z} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{q},$$

де

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{q}_t = \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{q},$$

або

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{I} \mathbf{q} \quad (1.108)$$

Система (1.108) розпадається на два скалярних диференціальних рівняння

$$\frac{dq_1}{dt} = \lambda_1 q_1, \quad \frac{dq_2}{dt} = \lambda_2 q_2 \quad (1.109)$$

Розглянемо два випадки: а) λ_1 і λ_2 – дійсні; б) λ_1 і λ_2 – комплексні.

а) Якщо λ_1 і λ_2 дійсні, то не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\lambda_2 \neq 0$. Отже, з (1.109) маємо

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{q_1}{q_2}.$$

Звідси

$$q_1 = C|q_2|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \quad (1.110)$$

Розглянемо цей розв'язок детальніше. Припустимо, що λ_1 і λ_2 мають однакові знаки і $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Тоді $\lambda_1/\lambda_2 > 1$, отже, усі інтегральні криві (1.110) є параболи, які мають спільну точку $q_1 = q_2 = 0$ і дотикаються у ній до осі Oq_2 (рис. 1.10).

Зазначимо, що крім інтегральних кривих (1.110) у цьому випадку траєкторіями є також півпрямі (дві півосі) осі Oq_1 , тобто $q_2 = 0$, $q_1 \neq 0$. Точку $(0,0)$ при цьому називають *вузлом*.

Нехай тепер λ_1 і λ_2 мають різні знаки. Тоді розв'язок (1.110) можна записати так:

$$q_1 = C|q_2|^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}.$$

Отже, у цьому випадку чотири інтегральні криві $q_1 = 0$ ($q_2 \neq 0$), $q_2 = 0$ ($q_1 \neq 0$) прилягають до особливої точки $(0,0)$, решта інтегральних кривих має вигляд, зображений на рис. 1.11. Особливу точку $(0,0)$ тут називають *сідлом*.

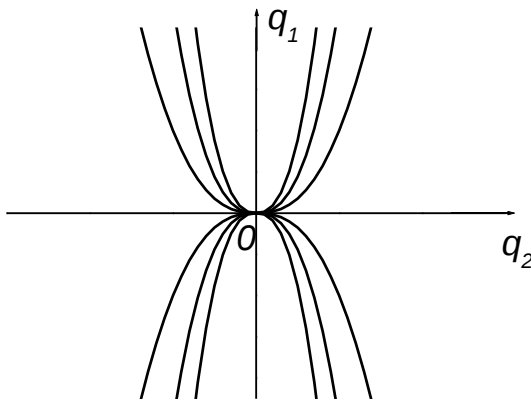


Рис. 1.10

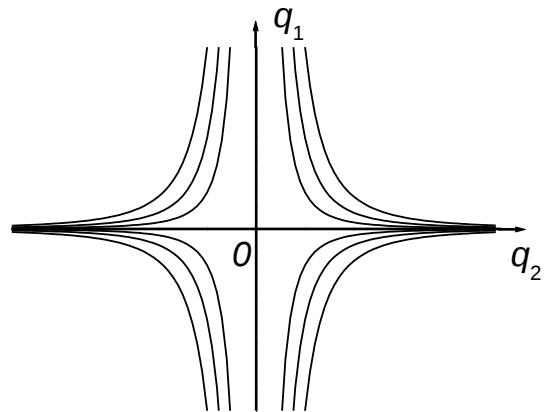


Рис. 1.11

б) Нехай λ_1 і λ_2 комплексні. Внаслідок того що коефіцієнти рівняння (1.106) дійсні, то λ_1 і λ_2 комплексно-спряжені, тобто

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i.$$

Тоді матриця перетворення T є комплексною. Проте оскільки елементи першого стовпця матриці T довільні, то їх можна підібрати так, що величини q_1 і q_2 будуть також комплексно-спряжені:

$$q_1 = u + \omega i, \quad q_2 = u - \omega i. \quad (1.111)$$

Справді, елементи t_{ik} ($i, k = 1, 2$), матриці T визначаються двома системами рівнянь

$$\begin{cases} t_{11}(c - \lambda_1) + t_{12}a = 0, \\ t_{11}k + t_{12}(b - \lambda_1) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t_{21}(c - \lambda_2) + t_{22}a = 0, \\ t_{21}k + t_{22}(b - \lambda_2) = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник кожної із систем, згідно з (1.106), дорівнює нулю, то ці системи мають ненульові розв'язки:

$$t_{12} = \frac{k \cdot t_{11}}{\lambda_1 - b}, \quad t_{22} = \frac{k \cdot t_{21}}{\lambda_2 - b},$$

де $t_{11} \neq 0$, $t_{21} \neq 0$ і знаменники відмінні від нуля. Тоді, нехай

$$t_{21} = \bar{t}_{11},$$

де $\bar{t}_{11}$ – число, спряжене з t_{11} . Маємо

$$t_{22} = \bar{t}_{12}.$$

Крім того,

$$q_1 = t_{11}z_1 + t_{12}z_2, \quad q_2 = t_{21}z_1 + t_{22}z_2.$$

Отже, поклавши

$$u = \frac{q_1 + q_2}{2}, \quad \omega = \frac{q_1 - q_2}{2i}, \quad (1.112)$$

дістанемо формули (1.111), причому величини u , ω , згідно з (1.112), при дійсних значеннях z_1 , z_2 мають дійсні значення.

Підставивши в рівняння (1.109) значення q_1 , q_2 , λ_1 , λ_2 матимемо

$$\frac{du + i d\omega}{du - i d\omega} = \frac{\alpha + \beta i}{\alpha - \beta i} \cdot \frac{u + \omega i}{u - \omega i},$$

або

$$\begin{aligned} & (du + i d\omega) \cdot ((\alpha \cdot u - \beta \cdot \omega) - i \cdot (\alpha \cdot \omega + \beta \cdot u)) = \\ & = (du - i d\omega) \cdot ((\alpha \cdot u - \beta \cdot \omega) + i \cdot (\alpha \cdot \omega + \beta \cdot u)), \end{aligned}$$

а це є рівність типу $z = \bar{z}$. Прирівнявши уявні частини до нуля, дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\omega} &= \frac{\alpha \cdot u - \beta \cdot \omega}{\beta \cdot u + \alpha \cdot \omega}, \\ \frac{\beta(udu + \omega d\omega)}{u^2 + \omega^2} &= \frac{\alpha(ud\omega - \omega du)}{u^2 - \omega^2}, \end{aligned}$$

або

$$\frac{1}{2} d \left[\ln(u^2 + \omega^2) \right] + \frac{\alpha}{\beta} d \left[\arctg \frac{\omega}{u} \right] = 0.$$

Звідси

$$\sqrt{u^2 + \omega^2} = Ce^{-\frac{\alpha}{\beta} \arctg \frac{\omega}{u}}.$$

Поклавши $u = r \cos \varphi$, $\omega = r \sin \varphi$, матимемо

$$r = Ce^{-\frac{\alpha}{\beta} \varphi} \quad (1.113)$$

Це рівняння задає сім'ю логарифмічних спіралей у площин $uO\omega$ з асимптотичною точкою в полюсі.

При цьому усі криві (1.113) прилягають до початку координат і роблять нескінченне число обертів навколо точки $u = 0$, $\omega = 0$ (рис. 1.12).

Те саме матимемо в околі особливої точки $x = 0$, $y = 0$ диференціального рівняння (1.103). Особливу точку $x = 0$, $y = 0$ при цьому називають *фокусом*.

Якщо λ_1 і λ_2 чисто уявні, тобто коли $\alpha = 0$, то криві (1.113) є сім'єю замкнених кривих. У площин $uO\omega$ матимемо концентричні кола (рис. 1.13). Особливу точку у цьому випадку називають *центром*.

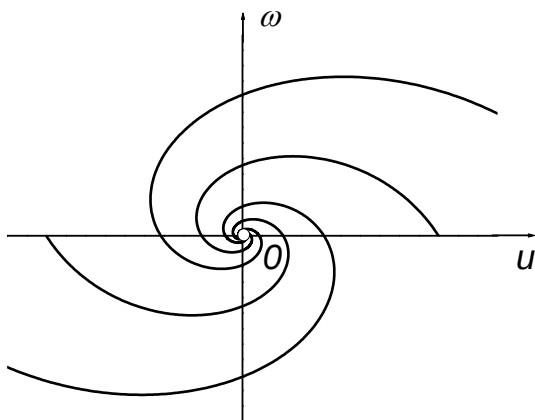


Рис. 1.12

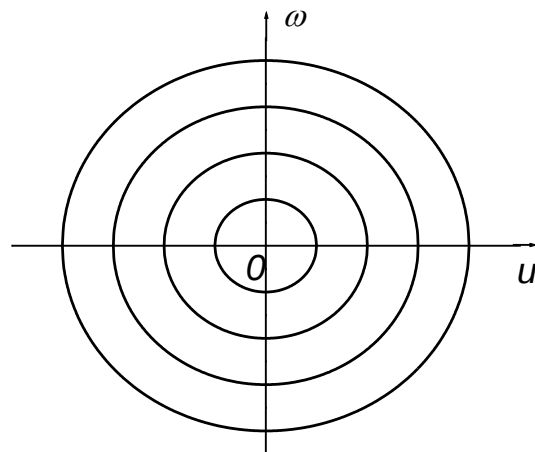


Рис. 1.13

Другий випадок. Корені характеристичного рівняння рівні між собою $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Тоді із (1.107) випливає

$$\lambda = \frac{b + c}{2}.$$

При цьому вид матриці $\mathbf{I}$ залежить від кратності елементарного дільника, відповідного кореню λ . Можливі два випадки:

- а) кореню λ відповідає два простих елементарних дільника;
- б) кореню λ відповідає один елементарний дільник кратності 2.

Випадок а) можливий тоді і тільки тоді, коли ранг системи рівнянь

$$\begin{cases} t_{11}(c - \lambda) + t_{12}k = 0; \\ t_{11}a + t_{12}(b - \lambda) = 0, \end{cases} \quad (1.114)$$

з якої визначаються елементи матриці T , дорівнює нулю. Тоді має виконуватися рівність

$$a = k = 0, \quad b = c = \lambda.$$

Отже, рівняння (1.103) прийме вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Інтегральні криві цього рівняння визначаються за формулами

$$y = Cx, \quad x \neq 0;$$

$$x = 0, \quad y \neq 0.$$

Таким чином, маємо сім'ю півпрямих, що прилягають до точки $(0,0)$ кожна із своїм напрямком (рис. 1.14). Особливу точку $(0,0)$ називають також *вузлом* (*дикритичним вузлом*).

Випадок б) можливий тоді, коли ранг системи (1.114) дорівнює 1. Тоді матриця I це одна клітина Жордана.

$$I = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Отже, система (1.108) буде мати вигляд

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \lambda \cdot q_1 + q_2, \\ \frac{dq_2}{dt} = \lambda q_2. \end{cases}$$

Звідси дістанемо лінійне рівняння

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{q_1}{q_2} + \frac{1}{\lambda},$$

загальним розв'язком якого є функція

$$q_1 = \frac{1}{\lambda} q_2 \ln|q_2| + Cq_2, \quad q_2 \neq 0. \quad (1.115)$$

Крім розв'язку (1.115), маємо ще два розв'язки

$$q_2 = 0, \quad q_1 \neq 0 \quad \text{і} \quad q_1 = 0, \quad q_2 \neq 0.$$

Отже, інтегральні криві прилягають до точки, кутовий коефіцієнт дотичних до яких дорівнює $\pm \infty$ (рис. 1.15). Особливу точку $(0,0)$ при цьому називають *виродженим вузлом*.

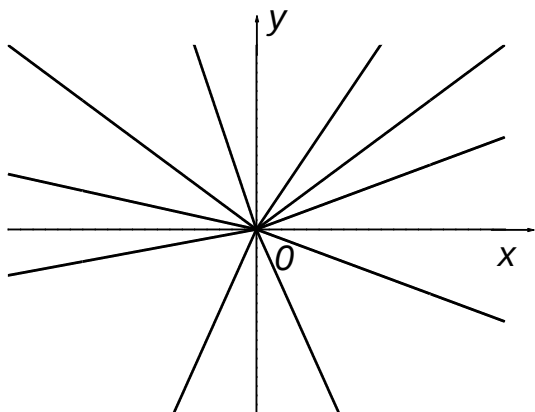


Рис. 1.14

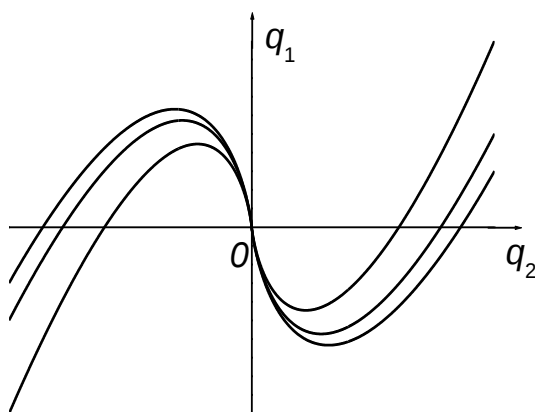


Рис. 1.15

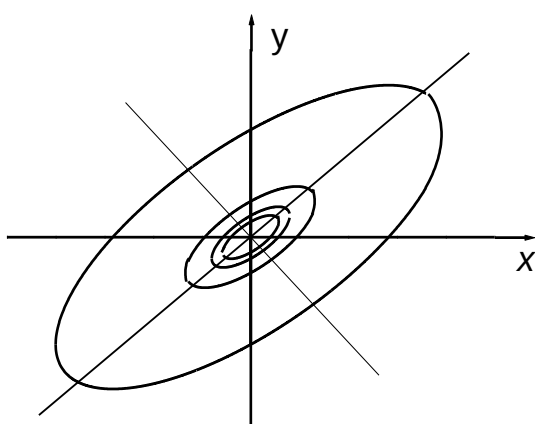


Рис. 1.16

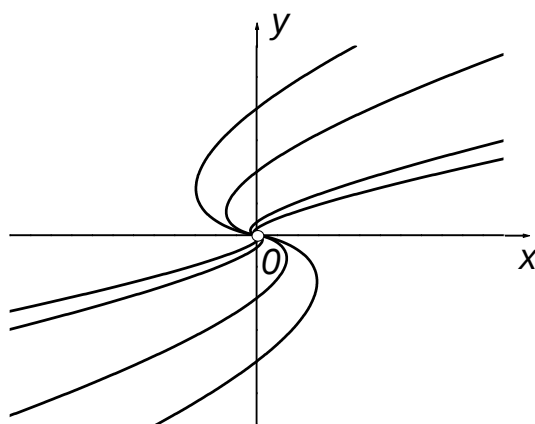


Рис. 1.17

На основі здобутих результатів робимо висновок, що для диференціального рівняння (1.115) точка $(0,0)$ є особливою. Тип особливості визначається коренями характеристичного рівняння (1.106), тобто числом $(b-c)^2 + 4ak$, а саме:

$$(b-c)^2 + 4ak > 0 \begin{cases} bc - ak > 0 - \text{вузол}; \\ bc - ak < 0 - \text{сідло}, \end{cases}$$

$$(b-c)^2 + 4ak < 0 \begin{cases} b+c \neq 0 - \text{фокус}; \\ b+c = 0 - \text{центр}, \end{cases}$$

$$(b-c)^2 + 4ak = 0 - \text{дискритичний вузол}$$

– тоді і тільки тоді, коли $a = k = 0$, $b = c$.

Приклад. Дослідити в околі точки $(0,0)$ поведінку інтегральних кривих рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-y}$.

Розв'язання. З характеристичного рівняння типу (1.106) знаходимо

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i.$$

Отже, λ_1 і λ_2 – комплексно-спряжені. Тому точка $(0,0)$ для заданого рівняння є центром. Інтегральні криві зображені на рис. 1.16.

Приклад. Дослідити в околі точки $(0,0)$ поведінку інтегральних кривих рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y}$.

Розв'язання. Тут $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, а елементарний дільник, в силу того, що $k=1 \neq 0$ – кратний. Тому точка $(0,0)$ для даного рівняння є виродженим вузлом. Інтегральні криві зображені на рис. 1.17.

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка точка називається особливою точкою для диференціального рівняння першого порядку?

2. Які типи особливих точок Вам відомі?

3. Дослідити в околі точки $(0,0)$ поведінку інтегральних кривих рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$.

1.8. Диференціальні рівняння першого порядку, нерозв'язанні відносно похідної

Теорема існування та єдиності розв'язку. Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку в загальному вигляді (нерозв'язаному відносно похідної)

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.116)$$

З формальної точки зору можна сказати, що розв'язуючи це рівняння відносно похідної, матимемо не один, а декілька дійсних розв'язків $y' = f_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots$), і тоді кожний з цих розв'язків визначає в довільній точці (x_0, y_0) свій напрям. Тому властивість єдиності розв'язку рівняння (1.116) за умови

$$y(x_0) = y_0$$

слід розуміти так, що через дану точку (x_0, y_0) в даному напрямі проходить не більш однієї інтегральної кривої рівняння (1.116).

Теорема. Якщо в деякому замкненому околі точки (x_0, y_0, y'_0) , де y'_0 – один із дійсних коренів рівняння $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$, виконуються умови

1) функція $F(x, y, y')$ неперервна за трьома аргументами;

2) існує обмежена по абсолютній величині похідна $\frac{\partial F}{\partial y}$, тобто $\left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \leq L$;

3) похідна $\frac{\partial F}{\partial y}$ існує і відмінна від нуля,

тоді в проміжку $x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$, де h_0 – досить мале число, існує єдиний розв'язок рівняння (1.116), що задовольняє умову $y(x_0) = y_0$, та для якого $y'(x_0) = y'_0$.

Розглянемо деякі випадки диференціальних рівнянь (1.116) для яких можна визначити способи відшукування їх розв'язків. При цьому усе буде залежати від вигляду функції F і її властивостей.

Насамперед, відзначимо, що коли рівняння (1.116) можна розв'язати відносно похідної, то одержуємо одне або кілька рівнянь, що можуть належати до розглянутих раніше типів. Сукупність загальних розв'язків або загальних інтегралів останніх і дає в цьому випадку загальний інтеграл рівняння (1.116).

Рівняння n -ого степеня. Розглянемо диференціальне рівняння виду

$$a_0(x, y)(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0, \quad (1.117)$$

де $a_i(x, y)$, $i = 0, 1, \dots, n$ – функції, неперервні в деякій області D площини xOy . Рівняння виду (1.117) називають диференціальним рівнянням першого порядку n -ого степеня.

Метод розв'язування. Нехай в області D функція $a_0(x, y) \neq 0$. Тоді, згідно з основною теоремою вищої алгебри, рівняння (1.117) для всякої пари

значень x, y у розглянутій області має n дійсних і уявних розв'язків для y' . Не приймаючи до уваги уявні розв'язки для y' , будемо мати $k \leq n$ диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної

$$y'_i = f_i(x, y), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (1.118)$$

Кожне з цих рівнянь задає в деякій області D_1 площини xOy своє поле напрямків. Якщо $f_i(x, y)$ в області D_1 задовольняють умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші, то через кожную точку області D_1 проходить k інтегральних кривих диференціального рівняння (1.117). Щоб знайти ці криві, треба проінтегрувати кожне з рівнянь (1.118). Сукупність одержаних таким чином загальних розв'язків

$$y_i = \Phi_i(x, C),$$

або загальних інтегралів

$$\Phi_i(x, y, C) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

де C – довільна стала, є загальним інтегралом рівняння (1.117).

Приклад. Знайти розв'язок рівняння

$$y'^2 - (x + y)y' + xy = 0.$$

Розглядаючи його як квадратне відносно y' , матимемо

$$y'_1 = x, \quad y'_2 = y,$$

тобто два рівняння першого порядку, розв'язаних відносно похідної.

Після інтегрування кожного з цих рівнянь знаходимо їх загальні розв'язки

$$y_1 = \frac{x^2}{2} + C, \quad y_2 = Ce^x,$$

які у сукупності дають (складають) загальний інтеграл вихідного рівняння. Помітимо, що інтегральними кривими будуть також криві, що складені (утворені) з дуг обох сімейств розв'язків, якщо в загальних точках ці дуги мають загальну дотичну.

Рівняння, що залежить тільки від y . Нехай тепер функція F у рівнянні (1.116) залежить тільки від y' , тобто це рівняння приймає вигляд

$$F(y') = 0. \quad (1.119)$$

Метод розв'язування. Нехай це рівняння має деяке скінченне або нескінченне число дійсних коренів $y' = k_i$, що цілком не заповнюють деякий інтервал, тоді $y = k_i x + C$ або $k_i = \frac{y - C}{x}$. Одержуємо загальний інтеграл рівняння (1.119) у вигляді

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0. \quad (1.120)$$

Приклад. Диференціальне рівняння $y'^3 - 3y'^2 + 2 = 0$ має загальний інтеграл

$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{y - C}{x}\right)^2 + 2 = 0.$$

Коли згадані вище корені, заповнюють цілком деякий інтервал, то рівняння (1.119) може мати розв'язки, відмінні від (1.120).

Рівняння, яке не містить явно невідомої функції y . При розв'язуванні рівнянь (1.116) у тих випадках, коли функція F залежить тільки від x і y' , зручно користатися *параметричним інтегруванням (метод введення параметра)*.

Отже, розглянемо рівняння виду

$$F(x, y') = 0. \quad (1.121)$$

Метод розв'язування. Припустимо, що це рівняння можна записати у параметричній формі

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t).$$

Скориставшись рівністю $dy = y'dx$, маємо

$$dy = \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

звідси

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

Таким чином, загальний інтеграл рівняння (1.121) записується в параметричній формі

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C. \quad (1.122)$$

У випадку коли із системи рівнянь (1.122) можна виключити параметр t , знайдемо загальний розв'язок у вигляді $y = \omega(x, C)$, або загальний інтеграл $\Phi(x, y, C) = 0$ рівняння (1.121).

Якщо рівняння (1.121) легко розв'язати відносно x , тобто $x = \varphi(y')$, то зручно ввести $y' = t$, тоді

$$x = \varphi(t), \quad y = \int t\varphi'(t)dt + C. \quad (1.123)$$

Приклад. Розв'язати рівняння $x^3 y' - (1 - y')^3 = 0$.

Розв'язання. Розв'язуючи дане рівняння відносно x , одержимо

$$x = \frac{(1 - y')}{\sqrt[3]{y'}}.$$

Це рівняння допускає параметричне зображення

$$y' = t, \quad x = \frac{1 - t}{\sqrt[3]{t}},$$

тоді його загальний розв'язок, відповідно до формули (1.123) має вигляд

$$x = \frac{1 - t}{\sqrt[3]{t}}, \quad y = \int t \left(\frac{-\sqrt[3]{t} - \frac{1}{3}t^{-2/3}(1 - t)}{t^{2/3}} \right) dt + C,$$

або остаточно

$$x = \frac{1 - t}{\sqrt[3]{t}}, \quad y = -\frac{2}{5}t^{5/3} - \frac{1}{2}t^{2/3} + C.$$

Рівняння, що не містить явно незалежної змінної. Мало, чим у цьому випадку відрізняється інтегрування рівняння

$$F(y, y') = 0. \quad (1.124)$$

Метод розв'язування. Нехай це рівняння можна записати у параметричній формі

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t).$$

Тоді для визначення залежності змінної x від параметра, маємо

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)},$$

звідси

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C$$

і інтегральні криві у параметричній формі визначаються рівняннями

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C, \quad y = \varphi(t). \quad (1.125)$$

Коли рівняння (1.124) легко розв'язати відносно y , тобто $y = \varphi(y')$, то приймаючи $y' = t$, маємо

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{t} + C, \quad y = \varphi(t).$$

Зауваження. В останньому випадку при діленні на t , припускаючи $t \neq 0$, можна втратити розв'язки $y = k_i$, де k_i – дійсні корені рівняння $F(y, 0) = 0$. Тому цей випадок треба розглядати окремо. Якщо рівняння $F(y, 0) = 0$ має дійсні корені $y = k_i$, які обов'язково будуть розв'язками рівняння (1.124) і не входять у загальний інтеграл, то вони можуть бути особливими розв'язками рівняння (1.124).

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = 1$.

Розв'язання. Покладемо

$$y' = \operatorname{sh} t,$$

тоді, згідно (1.125)

$$y = \operatorname{ch} t, \quad x = t + C.$$

Виключивши параметр t , одержимо загальний розв'язок вихідного рівняння у вигляді

$$y = \operatorname{ch}(x - C).$$

Загальний метод введення параметра. Рівняння Лагранжа і Клеро. Розглянемо рівняння

$$F(x, y, p) = 0, \quad (1.126)$$

де $p = y'$.

Якщо ми будемо розглядати x , y , p , як декартові координати в просторі, то рівняння (1.126) визначить деяку поверхню. Відомо, що координати точок

поверхні можуть бути виражені як функції двох параметрів u, v . Нехай нам відомо таке параметричне зображення поверхні (1.126):

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad p = \theta(u, v). \quad (1.127)$$

Користаючись залежністю $dy = y'dx$, маємо

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right),$$

звідси відразу одержуємо рівняння, розв'язане відносно похідної, з відомою правою частиною

$$\frac{dv}{du} = \frac{\theta \varphi'_u - \psi'_u}{\psi'_v - \theta \varphi'_v}, \quad (1.128)$$

Якщо ми знайдемо його загальний розв'язок у вигляді

$$v = \omega(u, C),$$

то загальний розв'язок рівняння (1.126) одержимо в параметричній формі безпосередньо з (1.127)

$$x = \varphi[u, \omega(u, C)], \quad y = \psi[u, \omega(u, C)].$$

Перетворення (1.127) так само застосовується у випадку, якщо рівняння (1.126) легко розв'язується відносно x або y . Тоді у виразі (1.127) за параметри зручніше взяти y і p або x і p , відповідно.

Однак, слід зауважити, що загальний розв'язок рівняння (1.128), взагалі кажучи, не можна одержати в квадратурах. Зараз ми розглянемо типи рівнянь, нерозв'язаних відносно похідної, у застосуванні до яких, метод диференціювання (загальний метод введення параметра) завжди приводить до рівняння, що інтегрується в квадратурах. Це *рівняння Лагранжа*. Так називається рівняння, лінійне відносно x і y , тобто рівняння вигляду:

$$A(p)y + B(p)x = C(p),$$

де коефіцієнти $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ – відомі диференційовні функції похідної $p = y'$. Розв'язуючи це рівняння відносно y (поділяючи на $A(p) \neq 0$), приводимо його до вигляду

$$y = \varphi(p)x + \psi(p). \quad (1.129)$$

Метод розв'язування. Диференціюючи обидві частини рівняння (1.129), одержимо:

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}.$$

Нехай $\frac{dp}{dx} \neq 0$, тоді, поділивши останній вираз на $\frac{dp}{dx}$, матимемо рівняння

$$[p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p),$$

лінійне щодо невідомої функції x змінної p . Коли $p - \varphi(p) \neq 0$, це рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Інтегруючи його відомими методами (як лінійне неоднорідне рівняння першого порядку щодо функції $x(p)$), одержимо його загальний розв'язок у вигляді

$$x = \Phi(p)C + \Psi(p),$$

де $\Phi(p)$ і $\Psi(p)$ – відомі функції, а C – довільна стала.

Приймаючи до уваги співвідношення (1.129), загальний розв'язок рівняння Лагранжа запишемо в параметричному вигляді

$$\begin{aligned} x &= \Phi(p)C + \Psi(p), \\ y &= \Phi_1(p)C + \Psi_1(p), \end{aligned} \quad (1.130)$$

де функції $\Phi_1(p)$ і $\Psi_1(p)$, як видно, досить просто визначаються функціями $\varphi(p)$, $\psi(p)$, $\Phi(p)$, $\Psi(p)$.

При діленні на $\frac{dp}{dx}$ ми могли втратити розв'язки, якщо вони існують, для яких $\frac{dp}{dx} = 0$, тобто $p = p_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Це можливо для тих значень p_i , що, крім того, є корені рівняння $p - \varphi(p) = 0$. У цьому випадку рівняння Лагранжа буде мати ще розв'язок

$$y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y = 2y'x + y'^2$.

Розв'язання. Позначимо $y' = p$, одержимо рівняння Лагранжа

$$y = 2px + p^2.$$

Диференціюємо останнє рівняння по x , вважаючи p і y функціями x , і замінюючи y' через p , маємо

$$p = 2p + 2(x + p)p'.$$

Розв'язуючи відносно $\frac{dx}{dp}$, знаходимо

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - 2.$$

Розв'язком цього рівняння є функція $x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}$.

Підставляючи цей вираз у співвідношення для y , згідно (1.130), одержимо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}, \quad x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}.$$

Розглянемо тепер, окремо випадок, коли $\varphi(p) - p \equiv 0$, тобто випадок рівняння (1.129) у вигляді

$$y = xp + \psi(p), \quad (1.131)$$

який називається *рівнянням Клеро* і є окремим випадком рівняння Лагранжа.

Метод розв'язування. Диференціюючи (1.131) по x , одержимо

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx},$$

або

$$[x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0. \quad (1.132)$$

Звідси, враховуючи спочатку, що $\frac{dp}{dx} = 0$, тобто $p = C$, одержимо з (1.131), виключивши p , однопараметричну сім'ю інтегральних прямих

$$y = Cx + \psi(C). \quad (1.133)$$

Співвідношення (1.133) – це загальний розв'язок рівняння Клеро.

Таким чином, щоб знайти загальний розв'язок рівняння Клеро, треба в це рівняння замість y' підставити C .

Співвідношення (1.131) і (1.132) визначають ще один розв'язок рівняння

$$y = xp + \psi(p), \quad x + \psi'(p) = 0. \quad (1.134)$$

Можна показати (п. 1.9), що інтегральна крива, що визначається рівнянням (1.134), являє собою обвідну сім'ї інтегральних прямих (1.133) і є особливим розв'язком рівняння Клеро.

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Назвіть основні типи диференціальних рівнянь першого порядку, нерозв'язаних відносно похідної.

2. У чому полягає метод параметричного інтегрування диференціальних рівнянь, і для якого виду рівнянь зручно застосовувати цей метод при інтегруванні?

3. У яких випадках застосовується загальний метод введення параметра?

4. Який вигляд мають рівняння Лагранжа і Клеро?

5. Проінтегрувати рівняння:

а) $y = y'^2$, відповідь: $y = \frac{(x+C)^2}{4}$ і $y = 0$;

б) $y = y' + \frac{e^x}{y'}$, відповідь: $y = Ce^x + C^{-1}$ і $y = \pm 2e^{\frac{x}{2}}$;

$$\text{в) } y = xy' - y'^2,$$

$$\text{відповідь: } y = Cx - C^2 \text{ і } 4y = x^2;$$

$$\text{г) } y = 2xy' - 4y'^3,$$

$$\text{відповідь: } \begin{cases} x = 3p^2 + Cp^{-2}, \\ y = 2p^3 + 2Cp^{-1}, \\ y = 0. \end{cases}$$

1.9. Особливі розв'язки. Обвідна сім'я кривих

Виділимо клас диференціальних рівнянь, для яких можна розглянути таке питання: чи має задане рівняння особливий розв'язок: якщо має, то як його знайти?

1. Нехай маємо диференціальне рівняння, розв'язане відносно похідної

$$y' = f(x, y) \quad (1.135)$$

Припустимо, що функція $f(x, y)$ у розглядуваній замкненій області D площини xOy неперервна. Якщо $f(x, y)$ в цій області має обмежену похідну по y , $|f'_y(x, y)| \leq N < +\infty$ то, згідно з теоремою Коші, через кожную точку області D проходить тільки одна інтегральна крива диференціального рівняння (1.135). Отже, тоді рівняння (1.135) особливих розв'язків не має.

Наприклад, якщо в диференціальному рівнянні

$$y' = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)y + a_n(x)$$

коефіцієнти $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$, є функції, неперервні на відрізку $[a, b]$, то це рівняння в будь-якому замкненому прямокутнику $R: [a, b; c, d]$ особливих розв'язків не має. Звідси, зокрема, випливає, що лінійне диференціальне рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

з неперервними коефіцієнтами особливих розв'язків не має. Таким чином, особливі розв'язки рівняння (1.135) можуть проходити через ті точки, в яких не виконуються умови теореми Коші. Так, якщо $f(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) неперервна, що припускати будемо в подальшому, то особливі розв'язки можуть проходити тільки через ті точки області D , в яких не виконується умова Ліпшиця. Умова Ліпшиця, напевне, виконується, якщо $f(x, y)$ має в області D обмежену частинну похідну по y . Тому особливі розв'язки рівняння (1.135) можуть проходити тільки через ті точки області D , в околі яких $f'_y(x, y)$ стає необмеженою.

Отже, умова

$$|f'_y(x, y)| > N \quad (1.136)$$

при $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow y_0$, де N – будь-яке, як завгодно велике додатне число, є необхідною умовою того, щоб через точку (x_0, y_0) проходив особливий розв'язок диференціального рівняння (1.135). Звідси дістанемо таке правило знаходження особливого розв'язку рівняння (1.135) з неперервною правою частиною:

1) знайти множину точок області D , в яких виконується умова (1.136). Нехай ця множина точок є крива, яка задана рівнянням $\phi(x, y) = 0$;

2) безпосередньою підстановкою в рівняння перевірити, чи є знайдена множина точок розв'язком диференціального рівняння (1.135);

3) перевірити, чи порушується властивість єдиності в кожній точці здобутих таким способом розв'язків.

Якщо пп. 1) – 3) виконуються, то вони є достатніми для того, щоб функція $\varphi(x, y) = 0$ була особливим розв'язком диференціального рівняння (1.135).

Приклад. Знайти особливі розв'язки таких диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } y' = \sqrt{y}, \quad \text{б) } y' = \sqrt{y} + 1, \quad \text{в) } y' = \frac{y \ln y}{x}.$$

Розв'язання. а) тут $f(x, y) = \sqrt{y}$ є функція, неперервна в будь-якій замкненій області верхньої півплощини, тобто де $y \geq 0$. Проте $f'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ стає необмеженою при $y \rightarrow 0$ і $y > 0$. Тому лінія $y = 0$ може бути особливим розв'язком диференціального рівняння

$$y' = \sqrt{y} + 1. \quad (1.137)$$

Рівняння (1.137) допускає відокремлювання змінних

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx.$$

Проінтегрувавши цю рівність, знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння (1.137):

$$y = \left(\frac{x + C}{2} \right)^2, \quad x \geq -C, \quad (1.138)$$

де C – стала інтегрування.

Зрозуміло, що через кожен точку осі Ox (розв'язку $y = 0$) проходять дві інтегральні криві рівняння (1.137), а саме – лінія $y = 0$ і крива із сім'ї (1.138) (рис. 1.18).

б) частинна похідна $f'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ необмежена при $y \rightarrow 0$. Проте $y = 0$ не є розв'язком заданого диференціального рівняння. Оскільки в точках верхньої півплощини, де $y > 0$, права частина $f(x, y) = \sqrt{y} + 1$ задовольняє умови теореми Коші, то рівняння особливих розв'язків не має.

в) права частина цього рівняння $f(x, y) = \frac{y \ln y}{x}$ є функція, неперервна в будь-якій замкненій області, де $x \neq 0$ (при $y = 0$ маємо $f(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \ln y}{x} = 0$). Знайдемо похідну

$$f'_y(x, y) = \frac{\ln y + 1}{x}.$$

Звідси

$$\lim_{y \rightarrow 0} f'_y(x, y) = -\infty.$$

Отже, множина точок $y = 0$ (вісь Ox) може бути особливим розв'язком рівняння

$$y' = \frac{y \ln y}{x}. \quad (1.139)$$

Крім цього видно, що $y = 0$ є розв'язком даного рівняння. Перевіримо, чи порушується властивість єдиності. Для цього знайдемо загальний розв'язок рівняння (1.139):

$$y = e^{Cx}. \quad (1.140)$$

Розв'язок $y = 0$ можна дістати із загального розв'язку (1.140) при $C = -\infty$. Тому через кожен точку осі Ox (крім точки $x = 0$) проходить тільки одна інтегральна крива $y = 0$. Особливих розв'язків рівняння (1.139) не має.

Розміщення інтегральних кривих (1.140) на площин xOy показано на рис. 1.19. Зазначимо, що в точці $x = 0$ осі Oy права частина диференціального рівняння (1.139) не визначена. Проте, підставляючи $x = 0$ в загальний розв'язок (1.140), матимемо

$$y = 1.$$

Ця рівність справджується при будь-якому значенні C . Отже, всі інтегральні криві, крім інтегральної кривої $y = 0$, $x \neq 0$ прилягають до точки $(0;1)$.

2. Розглянемо питання про існування особливих розв'язків для диференціального рівняння, нерозв'язаного відносно похідної

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.141)$$

Якщо функція $F(x, y, y')$ в деякій області тривимірного простору задовольняє умови теореми Коші, то у відповідній області площини xOy через кожен точку (x_0, y_0) за даним напрямком проходить тільки одна інтегральна крива рівняння (1.141).

Отже, особливі розв'язки рівняння (1.141) можуть проходити тільки через ті точки, в яких порушуються умови зазначеної теореми. Зокрема, якщо $F(x, y, y')$ неперервна і має неперервні частинні похідні першого порядку, то особливі розв'язки слід шукати серед тих точок, координати яких одночасно задовольняють рівняння

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0, \\ p = y'. \end{cases} \quad (1.142)$$

Якщо система рівнянь (1.142) розв'язана, тобто існує значення (x, y) , які задовольняють двом рівнянням (1.142), то виключаючи з них параметр p , дістанемо в загальному випадку деяку множину точок $\varphi(x, y) = 0$, яка може бути особливим розв'язком диференціального рівняння (1.141). Таку множину точок $\varphi(x, y) = 0$ називають *дискримінантною кривою рівняння (1.141)*.

Отже, дискримінантні криві рівняння (1.141), якщо вони існують, можуть бути особливими розв'язками заданого рівняння.

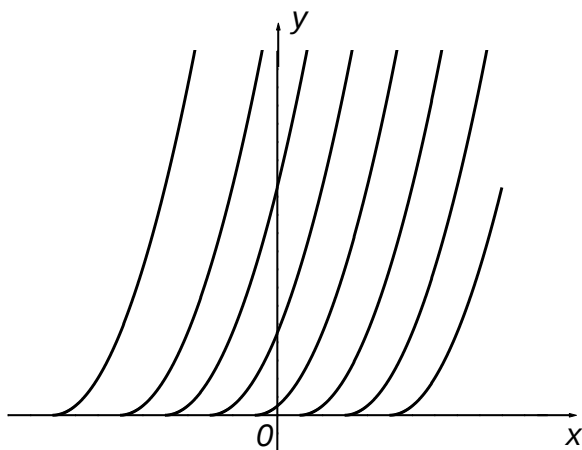


Рис. 1.18

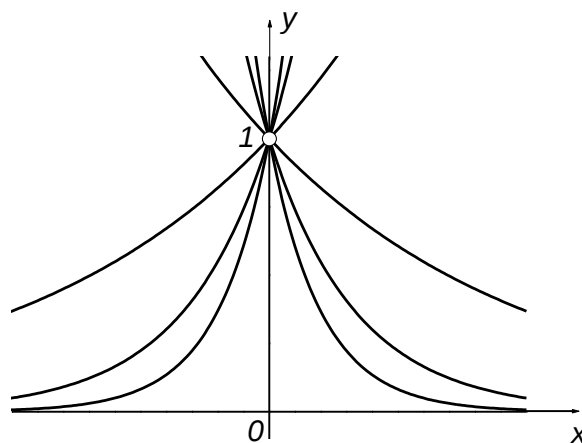


Рис.1.19

Звідси випливає один із способів знаходження особливих розв'язків рівняння (1.141). Для цього треба:

- 1) знайти дискримінантні криві рівняння;
- 2) перевірити, чи будуть дискримінантні криві інтегральними кривими заданого рівняння;
- 3) перевірити, чи порушується властивість єдиності в кожній з точок цих інтегральних кривих.

Якщо ці умови виконуються, то розв'язок диференціального рівняння (1.141) є особливим.

Приклад. Знайти особливий розв'язок рівняння

$$y - xy' + e^{y'} = 0. \quad (1.143)$$

Розв'язання. Складемо рівняння для дискримінантної кривої

$$\begin{cases} y - xp + e^p = 0, \\ -x + e^p = 0. \end{cases}$$

Знайдемо дискримінантну криву

$$y = x \ln x - x. \quad (1.144)$$

Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що крива (1.144) є розв'язком рівняння (1.143).

Оскільки рівняння (1.143) є рівнянням Клеро, то його загальним розв'язком є сім'я прямих (рис. 1.20):

$$y = Cx - e^C. \quad (1.145)$$

Як бачимо, через кожну точку кривої (1.144) проходять дві інтегральні криві: крива (1.144) і пряма із сім'ї (1.145). Розв'язок (1.144) є особливим розв'язком рівняння (1.143).

Розглянутий спосіб знаходження особливого розв'язку передбачає перевірку, чи є дискримінантна крива інтегральною кривою заданого диференціального рівняння. Проте цієї перевірки можна і не робити, скориставшись такою теоремою.

Теорема. Якщо $F(x, y, p)$, де $p = y'$, в області Ω неперервна разом з частинними похідними першого порядку і в цій області

$$F'_y(x, y, p) \neq 0, \quad (1.146)$$

то для того, щоб дискримінантна крива рівняння (1.146) була розв'язком заданого рівняння, необхідно і достатньо, щоб поряд з рівнянням (1.146) виконувалася рівність

$$F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) = 0. \quad (1.147)$$

Приклад. Знайти особливий розв'язок диференціального рівняння

$$y'^2 - y = 0.$$

Розв'язання. Визначимо дискримінантну криву заданого рівняння. Для цього складемо систему рівнянь (1.142)

$$\begin{cases} p^2 - y = 0, \\ 2p = 0. \end{cases}$$

Звідси робимо висновок, що дискримінантною кривою є лінія $y = 0$. Перевіряємо умову (1.147):

$$F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) = 0 + 0 \cdot (-1) = 0.$$

Отже, $y = 0$ є розв'язком заданого рівняння. Оскільки тут загальним розв'язком є сім'я парабол $y = \frac{1}{4}(x + C)^2$, то $y = 0$ є особливим розв'язком.

Крім розглянутого способу знаходження особливого розв'язку диференціального рівняння (1.141), існує інший спосіб, в основі якого лежить поняття обвідної однопараметричної сім'ї кривих.

Нехай маємо однопараметричну сім'ю кривих

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (1.148)$$

де C – параметр, який набуває значень, наприклад, з деякого проміжку (C_1, C_2) .

Криву l називають *обвідною сім'ї кривих* (1.148), якщо в кожній її точці існує спільна дотична до однієї з кривих даної сім'ї.

Припустимо, що сім'я кривих (1.148) є загальним інтегралом диференціального рівняння (1.141). Тоді якщо існує обвідна, то вона є особливим розв'язком рівняння (1.141).

Справді, візьмемо на обвідній довільну точку $M(x, y)$. У цій точці, яка одночасно належить і одній з інтегральних кривих, напрямок дотичної до обвідної збігається з напрямком поля, заданого диференціальним рівнянням (1.141). Отже, крива l є розв'язком заданого диференціального рівняння. Оскільки через кожну точку кривої l проходять дві інтегральні криві (крива l і одна з кривих сім'ї (1.148)), то l є особливим розв'язком рівняння (1.141).

Зазначимо, що, знаючи однопараметричну сім'ю кривих (1.148), можна знайти обвідну цієї сім'ї, якщо, звичайно, обвідна для цієї сім'ї існує. Наприклад, сім'я прямих $y = Cx$ та сім'я концентричних кіл $y^2 + x^2 - C^2 = 0$ обвідних не

мають, тоді як сім'я парабол $y = (x + C)^2$ має обвідну $y = 0$ (рис. 1.21). Сім'я кіл $(x - C)^2 + y^2 = R^2$ має дві обвідні $y = R$ і $y = -R$.

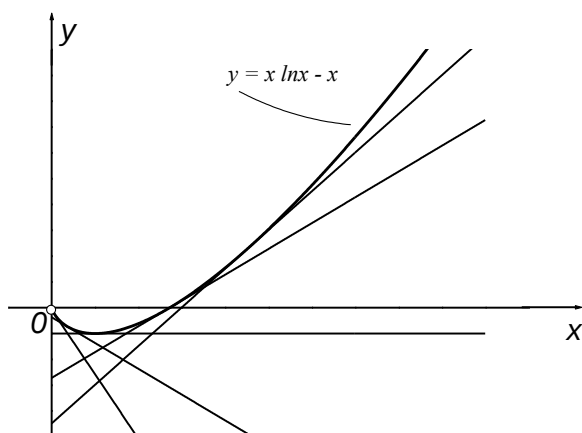


Рис. 1.20

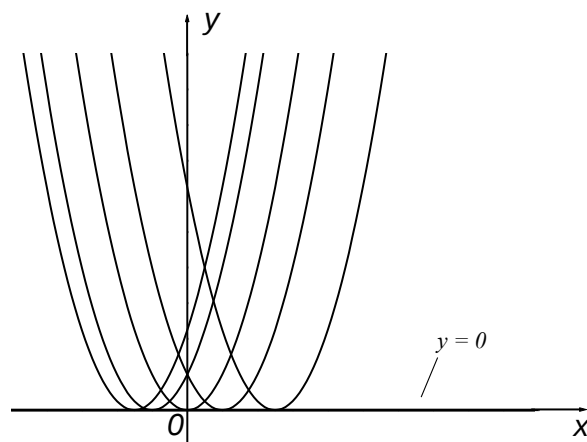


Рис. 1.21

Виведемо необхідні умови існування обвідної.

Нехай сім'я кривих (1.148) має обвідну, рівняння якої записано в параметричній формі:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (1.149)$$

де $x(t)$, $y(t)$ – диференційовні функції на деякому відрізку (α, β) .

Оскільки обвідна при різних C дотикається різних кривих із сім'ї (1.148), то величину C в (1.148) можна розглядати як функцію t , тобто $C = C(t)$.

Припустимо, що $C'(t) \neq 0$ для $t \in (\alpha, \beta)$. У протилежному разі обвідна в кожній своїй точці дотикатиметься тієї самої кривої із сім'ї (1.148), а отже, вона злізеться з цією кривою.

Підставивши значення (1.149) у рівняння (1.148), дістанемо тотожність

$$\Phi(x(t), y(t), C(t)) \equiv 0.$$

Нехай $\Phi(x, y, C)$ має неперервні частинні похідні першого порядку. Тоді

$$\Phi'_x x'(t) + \Phi'_y y'(t) + \Phi'_C C'(t) = 0. \quad (1.150)$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт k дотичної до кривої із сім'ї (1.148) при умові, що $\Phi'_y \neq 0$:

$$k = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y}.$$

Кутовий коефіцієнт k_1 дотичної до обвідної дорівнює

$$k_1 = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Проте $k = k_1$. Тому

$$\Phi'_x x'(t) + \Phi'_y y'(t) = 0.$$

З рівняння (1.150) маємо

$$\Phi'_C(x, y, C) = 0.$$

Отже, якщо сім'я кривих (1.148) має обвідну і в кожній точці кривих з цієї сім'ї $\Phi'_y(x, y, C) \neq 0$ або $\Phi'_x(x, y, C) \neq 0$, то координати обвідної одночасно задовольняють рівняння

$$\begin{cases} \Phi(x(t), y(t), C(t)) = 0, \\ \Phi'_C(x(t), y(t), C(t)) = 0. \end{cases} \quad (1.151)$$

Умови (1.151) є, таким чином, необхідними для того, щоб крива (1.149) була обвідною сім'ї кривих (1.148). Криву, координати кожної точки якої задовольняють систему рівнянь (1.151), називають *дискримінантною кривою* сім'ї кривих (1.148).

Доведемо, що умови (1.151) у випадку, коли в кожній точці кривої (1.149) Φ'_x і Φ'_y одночасно не дорівнюють нулю, є достатніми для того, щоб ця крива була обвідною для сім'ї кривих (1.148).

Справді, нехай

$$\Phi'_y(x(t), y(t), C(t)) \neq 0.$$

Диференціюючи першу тотожність системи (1.151) по t , матимемо

$$\Phi'_x x'(t) + \Phi'_y y'(t) + \Phi'_C C'(t) = 0.$$

Звідси, згідно з другим рівнянням (1.151),

$$\Phi'_x x'(t) + \Phi'_y y'(t) = 0.$$

Отже,

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y},$$

тобто достатність доведено.

Таким чином, для знаходження обвідної однопараметричної сім'ї кривих необхідно:

- із системи рівнянь (1.151) за допомогою виключення параметра C знайти дискримінантну криву даної сім'ї;
- із здобутої таким способом дискримінантної кривої вилучити точки, де Φ'_x і Φ'_y одночасно дорівнюють нулю.

Та частина дискримінантної кривої, що залишилася, і є обвідною заданої сім'ї кривих.

Приклад. Знайти особливий розв'язок диференціального рівняння, Клеро

$$y = xy' + \psi(y'). \quad (1.152)$$

Розв'язання. Загальним розв'язком цього рівняння є сім'я прямих

$$y = Cx + \psi(C), \quad (1.153)$$

де C – довільна стала.

Побудувавши для рівняння (1.152) систему рівнянь (1.151), матимемо

$$\begin{cases} y - Cx - \psi(C) = 0, \\ x + \psi'(C) = 0. \end{cases} \quad (1.154)$$

Припустимо, що з другого рівняння можна виразити C через x :

$$C = \omega(x).$$

Підставимо це значення в перше рівняння системи (1.54):

$$y = x\omega(x) + \psi(\omega(x)). \quad (1.155)$$

Оскільки $\Phi'_y = 1 \neq 0$, то дискримінантна крива (1.155) є обвідною сім'ї прямих (1.153).

Отже, розв'язок (1.155) є особливим розв'язком диференціального рівняння Клеро (1.152).

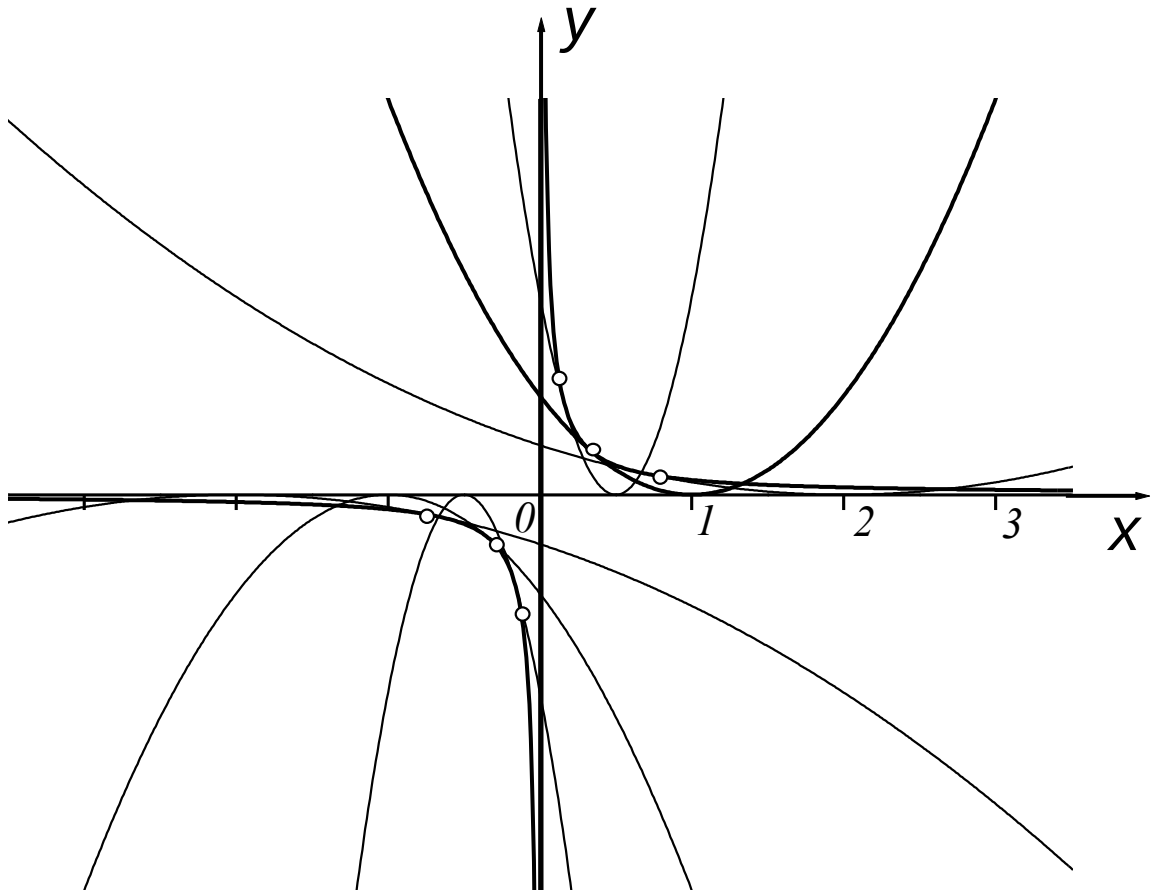


Рис. 1.22

Приклад. Знайти особливий розв'язок диференціального рівняння, якщо задано його загальний розв'язок:

$$y - C^3x^2 + 2C^2x - C = 0.$$

Розв'язання. Складемо систему рівнянь для дискримінантної кривої

$$\begin{cases} y - C^3x^2 + 2C^2x - C = 0, \\ 4Cx - 3C^2x^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Звідси дістанемо дві дискримінантні криві

$$y = 0, \quad y = \frac{4}{27x}.$$

Оскільки $\Phi'_y = 1$, то вздовж цих кривих $\Phi'_y \neq 0$. Тому дискримінантні криві є особливими розв'язками диференціального рівняння (рис. 1.22).

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яке існує правило знаходження особливого розв'язку рівняння першого порядку розв'язаного відносно похідної з неперервною правою частиною?

2. Яку множину точок називають дискримінантною кривою диференціального рівняння?

3. Як за допомогою дискримінантних кривих знайти особливі розв'язки диференціального рівняння першого порядку нерозв'язаного відносно похідної?

4. Яку криву називають обвідною однопараметричної сім'ї кривих?

5. Необхідні і достатні умови існування обвідної однопараметричної сім'ї кривих?

6. Знайти особливий розв'язок диференціального рівняння, якщо задано його загальний розв'язок:

а) $y = Cx^2 - C^2$, відповідь: $4y = x^4$;

б) $Cy = (x - C)^2$, відповідь: $y = 0$, $y = -4x$;

в) $y = C(x - C)^2$, відповідь: $y = 0$, $27y = 4x^3$;

г) $xy = Cy - C^2$, відповідь: $y = 4x$.

РОЗДІЛ 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

2.1. Загальні питання. Теорема про існування та єдиність розв'язку

Звичайне диференціальне рівняння n -го порядку має вигляд

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

або ж, коли воно розв'язано відносно старшої похідної, то

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2.2)$$

Нагадаємо, що будь-яка неперервна і n раз диференційовна на деякому проміжку функція $y = \varphi(x)$ називається розв'язком рівняння (2.2) або (2.1) на цьому проміжку, якщо вона перетворює це рівняння в тотожність

$$\varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)),$$

що виконується для кожного x із зазначеного проміжку.

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння (2.2), як і у випадку диференціальних рівнянь першого порядку, називають інтегруванням цього рівняння.

Основною задачею для рівняння (2.2) є *задача Коші* про знаходження розв'язку цього рівняння, що задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (2.3)$$

де $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – відомі числа.

З *геометричної точки зору* розв'язок задачі Коші (2.2), (2.3) – це інтегральна крива, що проходить через точку (x_0, y_0) , маючи значення похідних до $(n-1)$ -го порядку включно в цій точці.

Так, для диференціального рівняння другого порядку задача Коші здобуває такий зміст: серед усіх інтегральних кривих цього рівняння знайти ту інтегральну криву, що проходить через задану точку (x_0, y_0) і має в цій точці заданий напрямок дотичної $\operatorname{tg} \alpha = y'_0$.

Можна також дати *механічне тлумачення* задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку. Для цього розглянемо рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right),$$

що описує рух матеріальної точки уздовж прямої під дією сили $f(t, x, \dot{x})$. Задача Коші отут полягає в тому, що серед усіх розв'язків розглянутого рівняння, які у цьому випадку називаються рухами, необхідно знайти закон руху $x = x(t)$, який задовольняє початковим умовам $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$, тобто знайти такий рух, у якому точка, що рухається, у заданий момент часу t_0 , знаходилася б у положенні x_0 і мала б задану початкову швидкість x'_0 .

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння n -го порядку (2.2) в області D існування та єдиності розв'язку задачі Коші називають n -параметричну сім'ю функцій

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (2.4)$$

яка залежить від x і n довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ таку, що:

1) для будь-яких припустимих значень сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ функція (2.4) із зазначеної сім'ї є розв'язком рівняння (2.2), тобто перетворює його в тотожність

$$\varphi^{(n)}(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \equiv f\left(x, \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \dots, \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \dots, C_n)\right),$$

що виконується для усіх $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$;

2) для будь-яких початкових умов (2.3), тільки б точка $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ належить області D , можна так підібрати значення сталих $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$, щоб функція $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ із згаданої сім'ї задовольняла початковим умовам (2.3).

Якщо маємо співвідношення

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (2.5)$$

яке неявно визначає загальний розв'язок, то його називають загальним інтегралом рівняння (2.2).

Розв'язки, які дістанемо із загального розв'язку (2.4) надаючи конкретних значень сталим $C_1, C_2, \dots, C_n$, називаються частинними розв'язками рівняння (2.2).

Диференціюючи рівняння (2.4) або (2.5) $(n-1)$ раз по x і підставляючи потім $x = x_0$ і початкові умови (2.3), матимемо n рівнянь для визначення $C_1, C_2, \dots, C_n$... Ці рівняння мають єдиний розв'язок в області D , коли виконуються умови теореми існування та єдиності розв'язків. Таким чином, ми одержуємо розв'язок, що задовольняє умови (2.3), тобто частинний розв'язок.

Якщо права частина рівняння (2.2) є багатозначною функцією, то початковим умовам будуть задовольняти кілька розв'язків рівняння (2.2). Будь-який розв'язок, що не міститься в сім'ї загального розв'язку, тобто такий, що його не можна знайти з формули (2.4) ні при яких значеннях сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, називається *особливим розв'язком* рівняння (2.2).

Як і для диференціального рівняння першого порядку, так і для рівнянь n -го порядку природним і одним з основних є питання: які умови має задовольняти права частина рівняння (2.2), щоб задача Коші для даного рівняння мала розв'язок, і цей розв'язок був єдиним.

На це питання відповідає *теорема про існування та єдиність розв'язку* рівняння (2.2) за наявності початкових умов (2.3).

Теорема. Якщо права частина рівняння (2.2), тобто функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ в замкненій області D $(n+1)$ -вимірному простору задовольняє умови:

1) $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ є неперервною функцією в області D за сукупністю своїх аргументів, отже, обмежена в ній

$$|f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})| \leq M;$$

2) $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ за всіма змінними, починаючи з другої, задовольняє умову Ліпшиця:

$$\begin{aligned} & \left| f(x, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, y'_2, \dots, y_2^{(n-1)}) \right| \leq \\ & \leq N(|y_1 - y_2| + |y'_1 - y'_2| + \dots + |y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)}|), \end{aligned}$$

де N – стала Ліпшиця, а $(x, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)})$ і $(x, y_2, y'_2, \dots, y_2^{(n-1)})$ – довільні точки, що належать області D , то існує єдиний розв'язок диференціального рівняння (2.2) на відрізку $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, де

$$h = \min \left(a, \frac{b}{\max(M, |y'|, \dots, |y^{(n-1)}|)} \right),$$

що задовольняє умови (2.3).

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називається диференціальним рівнянням n -го порядку? Загальний вид?
2. У чому полягає задача Коші для диференціального рівняння n -го порядку?
3. Геометричний та механічний зміст задачі Коші для диференціального рівняння n -го порядку?
4. Що називається загальним розв'язком рівняння n -го порядку? Як знайти його частинний розв'язок?

5. Сформулюйте теорему про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння n -го порядку?

2.2. Рівняння n -го порядку, що інтегруються в квадратурах

Рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x) \quad (2.6)$$

легко інтегрується в квадратурах.

Метод розв'язування. Справді, з рівняння (2.6) послідовним інтегуванням одержуємо

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(x)dx + C_1, \quad y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(x)dx + C_1(x - x_0) + C_2, \dots,$$

і нарешті

$$y = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x f(x)dx + \frac{C_1(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1}(x - x_0) + C_n. \quad (2.7)$$

Формула (2.7) дає загальний розв'язок рівняння (2.6). При цьому з проміжних формул випливає, що формула (2.7) одночасно визначає розв'язок такої задачі Коші – знайти розв'язок рівняння (2.6), який задовольняє початкові умови

$$y_0(x_0) = C_n, \quad y'_0(x_0) = C_{n-1}, \quad \dots, \quad y_0^{(n-1)}(x_0) = C_1 \dots$$

Отже, перший член правої частини у формулі (2.7)

$$y = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x f(x)dx, \quad (2.8)$$

являє собою частинний розв'язок рівняння (2.6), який разом зі своїми похідними до $(n-1)$ -го порядку звертається в нуль при $x = x_0$. Його вигляд можна спростити, якщо скористатися формулою

$$\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(z)dz = \int_{x_0}^x (x - z)f(z)dz,$$

за допомогою якої одержуємо для згаданого частинного розв'язку вираз

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x - z)^{n-1} f(z)dz. \quad (2.9)$$

Це *формула Коші*, що визначає розв'язок рівняння (2.6), який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = 0 \dots$$

Якщо дане рівняння виду

$$F(y^{(n)}, x) = 0, \quad (2.10)$$

то розв'язавши його відносно $y^{(n)}$, ми зведемо його до виду (2.6), і всі попередні міркування зберігають силу. Але іноді вдається розв'язати це рівняння в елементарних функціях лише відносно x або, у більш загальному випадку, виразити x і $y^{(n)}$ як функції параметра t . Тоді інтегрування рівняння (2.10) може бути теж зведене до квадратур, вираженим явно. Нехай рівняння (2.10) можна записати в параметричній формі

$$x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t).$$

Тоді скориставшись рівністю $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, матимемо

$$dy^{(n-1)} = \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

звідси

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1,$$

тому загальний розв'язок рівняння (2.10) записується в параметричній формі так:

$$x = \varphi(t), \quad y = \underbrace{\int \int \int \dots \int}_n \psi(t)\varphi'(t)dt \dots dt + C_{n-1}t^{n-1} + \dots + C_n.$$

Приклад: Розв'язати рівняння $e^{y''} + y'' = x$.

Розв'язання. У параметричній формі дане рівняння можна записати так

$$x = e^t + t, \quad y'' = t.$$

Тоді

$$y' = \int t(e^t + 1)dt = te^t - e^t + C_1 + \frac{t^2}{2},$$

$$y = te^t - 2e^t + C_1t + \frac{t^3}{6} + C_2.$$

Рівняння виду

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0 \quad (2.11)$$

також зводиться до квадратур.

Метод розв'язування. Якщо його параметричне зображення має вигляд

$$y^{(n)} = \varphi(t), \quad y^{(n-1)} = \psi(t),$$

то із співвідношення $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, випливає $dx = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)}$, звідси маємо

$$x = \int \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + C_1.$$

Далі послідовно знаходимо

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\varphi(t)}, \quad y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + C_2, \dots$$

У підсумку маємо загальний розв'язок рівняння (2.11) у параметричній формі

$$x = \int \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + C_1, \quad y = \Phi(t, C_2, C_3, \dots, C_n).$$

Якщо рівняння (2.11) можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, тобто записати у вигляді

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}),$$

то підстановка $z = y^{(n-1)}$ відразу зводить його до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'''y'' - \sqrt{1 + (y'')^2} = 0.$$

Розв'язання. Дане рівняння задано у виді (2.11). Його ліва частина – функція $F(y'', y''') = y'''y'' - \sqrt{1 + (y'')^2}$ неперервна і має неперервні частинні похідні $F'_y = F'_{y'} = 0$, $F'_{y''} = y''' - \frac{y''}{\sqrt{1 + (y'')^2}}$, $F'_{y'''} = y''$. Тому, згідно з теоремою про існування та єдиність, задача

Коші для цього рівняння з будь-якими початковими умовами виду (x_0, y_0, y'_0, y''_0) ($y''_0 \neq 0$) має єдиний розв'язок. Функція y така, що $y'' = 0$, даному рівнянню не задовольняє.

Оскільки рівняння, що розглядається, можна розв'язати відносно y''' , то поклавши $y'' = u$, зведемо його до вигляду

$$u'u = \sqrt{1 + u^2},$$

звідки

$$\frac{udu}{\sqrt{1 + u^2}} = dx,$$

$$u = \pm \sqrt{(x + C_1)^2 - 1}$$

або

$$y'' = \pm \sqrt{(x + C_1)^2 - 1}.$$

Звідси послідовним інтегруванням одержуємо

$$y' = \pm \left[\frac{1}{2}(x + C_1)\sqrt{(x + C_1)^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \left| x + C_1 + \sqrt{(x + C_1)^2 - 1} \right| \right] + C_2,$$

$$y = \pm \left[\frac{1}{6} \sqrt{((x + C_1)^2 - 1)^3} - \frac{1}{2}(x + C_1) \ln \left| x + C_1 + \sqrt{(x + C_1)^2 - 1} \right| + \frac{1}{2} \sqrt{(x + C_1)^2 - 1} \right] + C_2x + C_3,$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі. Знак «плюс» відповідає загальному розв'язку в області $y'' > 0$, знак «мінус» – області $y'' < 0$.

Рівняння виду

$$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0. \quad (2.12)$$

Метод розв'язування. Рівняння (2.12) інтегрується в квадратурах за допомогою заміни $z = y^{(n-2)}$. Ця заміна зводить рівняння (2.12) до рівняння другого порядку

$$F(z'', z) = 0. \quad (2.13)$$

Нехай рівняння (2.13) має параметричне зображення

$$z = \varphi(t), \quad z'' = \psi(t),$$

тоді із співвідношень $dz' = z''dx$, $dz = z'dx$ маємо

$$z'dz' = z''dz$$

або

$$\frac{1}{2} d(z')^2 = \psi(t) \varphi'(t) dt,$$

$$(z')^2 = 2 \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C_1,$$

$$z' = \pm \sqrt{2 \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C_1},$$

після чого з рівності $dz = z'dx$ знаходимо dx , а потім

$$x = \pm \int \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{2 \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C_1}} + C_2. \quad (2.14)$$

Разом з рівністю $z = \varphi(t)$, співвідношення (2.14) визначає загальний розв'язок рівняння (2.13). Оскільки $z = y^{(n-2)}$, то щоб знайти загальний розв'язок рівняння (2.12), необхідно, інтегруючи $(n-2)$ рази рівність $z = \varphi(t)$, визначити y . В окремих випадках для інтегрування цих рівнянь можна скористатися й іншими способами.

Приклад. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$4y''\sqrt{y} = 1, \quad (2.15)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \quad (2.16)$$

Розв'язування. Рівняння (2.15) відноситься до виду (2.12). Із (2.15), враховуючи, що $y > 0$, одержимо

$$y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}. \quad (2.17)$$

Помножимо (2.17) на інтегруючий множник $\mu(y, y') = 2y'$:

$$2y'y'' = \frac{y'}{2\sqrt{y}},$$

звідки

$$\begin{aligned} \left((y')^2 \right)' &= \frac{y'}{2\sqrt{y}}, \quad (y')^2 = \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} + C_1, \\ (y')^2 &= \sqrt{y} + C_1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Сталу C_1 знайдемо із початкових умов. Підставивши у співвідношення (2.18) умови (2.16), одержимо, що $C_1 = 0$. Оскільки $y'(0) = -1$, з (2.18) випливає, що $y' = -\sqrt[4]{y}$, звідки

$$\begin{aligned} \frac{dy}{\sqrt[4]{y}} &= -dx, \\ \frac{4}{3} y^{3/4} &= -x + C_2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Враховуючи початкові умови (2.16), з (2.19) одержимо $C_2 = \frac{4}{3}$.

Тоді розв'язок задачі Коші остаточно має вигляд

$$y = \left(1 - \frac{3}{4}x \right)^{4/3}.$$

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як інтегруються рівняння $y^{(n)} = f(x)$ та $F(x, y^{(n)}) = 0$?
2. Інтегрування рівнянь виду $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$ та $F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$?
3. Розв'язати рівняння:

а) $y''' = \frac{24}{(x+2)^5}$, якщо $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -1$;

відповідь: $y = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{5}{16}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{5}{4}$;

б) $y'y'' = 1$, відповідь: $y = \frac{1}{3}(2x + C_1)^{3/2} + C_2$;

в) $(y'')^3 - 2y'' - x = 0$, відповідь: $x = t^3 - 2t$,
 $y = \frac{9}{28}t^7 - \frac{9}{10}t^5 + \left(\frac{2}{3} + C_1 \right)t^3 - 2C_1t + C_2$;

г) $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$, знайти загальний розв'язок у формі Коші

відповідь: $y = sh(x + \operatorname{arcsch} y_0'' - x_0) + \left(y_0' - \sqrt{1 + (y_0'')^2} \right)x + y_0 -$
 $- \left(y_0' - \sqrt{1 + (y_0'')^2} \right)x_0 - y_0''$

2.3. Рівняння, що допускають зниження порядку

Рівняння, яке не містить явно невідомої функції. Нехай диференціальне рівняння n -го порядку не містить явно невідомої функції y . Для загальності припустимо, що воно не містить також її $(k-1)$ перших похідних $y', \dots, y^{(k-1)}$, і нижча похідна, яка явно входить у рівняння, є $y^{(k)}$ ($1 \leq k \leq n-1$).

При зроблених припущеннях рівняння має вигляд

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.20)$$

Метод розв'язування. Покладаючи в рівнянні (2.20) $y^{(k)} = z$, прийдемо до рівняння

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0 \quad (2.21)$$

порядку $(n-k)$, тобто порядок знижений – замість рівняння n -го порядку ми одержали рівняння порядку $n-k < n$.

Так, наприклад, для рівняння другого порядку $F(y', y'', x) = 0$ – заміна $y' = z$, зводить його до рівняння першого порядку $F(z, z', x) = 0$.

Припустимо, що ми зуміли знайти загальний інтеграл рівняння (2.21):

$$\Phi(x, z, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) = 0,$$

або

$$\Phi(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) = 0. \quad (2.22)$$

Рівняння (2.22), що містить $(n-k)$ довільних сталих, називають проміжним інтегралом рівняння (2.20). При цьому рівняння (2.22) належить до типу (2.10), тобто інтегрується у квадратурах і, розв'язуючи його, ми знайдемо загальний інтеграл рівняння (2.20). Якщо $k = n$, ми безпосередньо маємо вже розглянуте нами рівняння (2.10).

Приклад. Проінтегрувати рівняння $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$.

Розв'язання. Це рівняння відноситься до типу (2.20), тобто знизимо порядок, застосовуючи заміну $y'' = z$, тоді $y''' = z'$ і рівняння буде мати вигляд

$$z - xz' + z'^3 = 0.$$

Це рівняння першого порядку нерозв'язане відносно похідної (рівняння Клеро). Його загальний розв'язок (проміжний інтеграл) має вигляд

$$z = xC_1 - C_1^3.$$

Оскільки $z = y''$, маємо $y'' = xC_1 - C_1^3$, тоді $y' = \frac{x^2}{2} C_1 - C_1^3 x + C_2$.

Отже, після інтегрування дістанемо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = \frac{x^3}{6} C_1 - \frac{C_1^3 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Рівняння, яке не містить явно незалежну змінну. Нехай рівняння (2.1) не містить явно x , тобто має вигляд

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.23)$$

Метод розв'язування. Тут ми застосуємо таку заміну змінних: як нову невідому функцію вводимо $p = y'$; за незалежну змінну прийемо y , тобто $p = p(y)$. Обчислимо в цьому припущенні похідні різних порядків функції y :

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(p \frac{dp}{dy}\right)}{dy} \frac{dy}{dx} = p \left[p \frac{d^2 p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \right] = p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy}\right)^2.$$

Таким чином, друга похідна від y по x виражається через p і $\frac{dp}{dy}$, третя похідна виражається через p і його похідні не вище другого порядку. Методом повної індукції можна показати, що $\frac{d^k y}{dx^k}$ виражається через $p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{(k-1)} p}{dy^{(k-1)}}$. Підставляючи вирази для $y'', y''', \dots, y^{(n)}$ у нових змінних, у рівняння (2.23), одержимо нове диференціальне рівняння порядку $(n-1)$:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{(n-1)} p}{dy^{(n-1)}}\right) = 0. \quad (2.24)$$

Інтегруючи рівняння (2.24), будемо мати його загальний інтеграл у вигляді

$$\Phi(y, p, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$$

або

$$\Phi\left(y, \frac{dy}{dx}, C_1, \dots, C_{n-1}\right) = 0,$$

який є проміжним інтегралом для рівняння (2.23) і одночасно диференціальним рівнянням першого порядку, що інтегрується у квадратурах відносно функції y .

Приклад. Розв'язати рівняння $2yy'' + (y')^2 = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння відноситься до розглядуваного типу (2.23).

Робимо заміну $y' = p(y)$, тоді $y'' = p \frac{dp}{dy}$ і рівняння буде мати вигляд

$$2y \frac{dp}{dy} + p = 0$$

– рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Тоді

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{2y}, \quad \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}.$$

Звідси $p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$ (проміжний інтеграл для вихідного рівняння).

Переходимо до змінних x і y :

$$p = y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \sqrt{y} dy = C_1 dx \Rightarrow \frac{2y^{3/2}}{3} = C_1 x + C_2.$$

Остаточно загальний розв'язок запишемо у вигляді

$$y = (C_1 x + C_2)^{2/3}.$$

Зниження порядку в однорідних рівняннях різних типів.

1. Нехай ліва частина рівняння (2.1) є однорідна функція аргументів $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, тобто виконується тотожність

$$F(x, ky, ky', \dots, ky^{(n)}) \equiv k^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \quad (2.25)$$

для будь-якого $k = \text{const}$; m – є показник однорідності.

Метод розв'язування. Порядок рівняння (2.25) може бути знижений на одиницю введенням нової невідомої функції z , зв'язаної з y співвідношенням

$$y = e^{\int z dx}. \quad (2.26)$$

Приклад. Розв'язати рівняння $x^2 y y' = (y - x y')^2$.

Розв'язання. Це рівняння – однорідне другого степеня відносно y, y', y'' . Застосуємо до нього підстановку (2.26), будемо мати рівняння

$$x^2 (z' + z^2) = (1 - x z')^2$$

або

$$x^2 z' + 2xz - 1 = 0$$

– лінійне рівняння відносно функції z . Розв'язуючи його, одержимо

$$z = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

Звідси

$$y = e^{\int \left(\frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx}$$

або остаточно загальний розв'язок:

$$y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}.$$

2. Іншим типом однорідних диференціальних рівнянь, що допускають зниження порядку, є рівняння, однорідні відносно $x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^ny \dots$. У цьому випадку рівняння (2.1) має вигляд:

$$\Phi(x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^ny) = 0. \quad (2.27)$$

Рівняння (2.27) належить до розглядуваного нами типу, якщо функція Φ однорідна (степеня m) у відношенні всіх своїх аргументів, тобто якщо має місце тотожність:

$$\Phi(kx, ky, kdx, kdy, kd^2y, \dots, kd^ny) \equiv k^m \Phi(x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^ny).$$

Метод розв'язування. У цьому випадку порядок рівняння (2.27) знижується за допомогою заміни

$$x = e^\xi, \quad y = ue^\xi. \quad (2.28)$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} - x^3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + 3x^2 y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - (3xy^2 + 2x^3) \frac{dy}{dx} + 2x^2 y + y^3 = 0.$$

Розв'язання. Дане рівняння – однорідне третього степеня відносно x, y, dx, dy, d^2y . Скористаємося підстановкою (2.28). Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{d\xi} + u, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-\xi} \left(\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{du}{d\xi} \right). \quad (2.29)$$

Підставляючи (2.29) у вихідне рівняння і скорочуючи на $e^{3\xi}$, матимемо

$$u'' + u' - (u' + u)^3 + 3u(u' + u)^2 - (3u^2 + 2)(u' + u) + 2u + u^3 = 0,$$

або, розкриваючи дужки і виконуючи приведення подібних,

$$u'' - u' - u'^3 = 0.$$

Нове рівняння не містить явно ні ξ , ні u . Покладаючи $u' = p$ і вводячи u як незалежну змінну, маємо

$$p \frac{dp}{du} - p - p^3 = 0.$$

Звідси, одержимо

$$du = \frac{dp}{1+p^2}, \quad p = \operatorname{tg}(u + C_1), \quad \text{тобто} \quad \frac{du}{d\xi} = \operatorname{tg}(u + C_1),$$

отже

$$\frac{du}{\operatorname{tg}(u + C_1)} = d\xi, \quad \ln |\sin(u + C_1)| = \xi + \ln |C_2|, \quad \sin(u + C_1) = C_2 e^\xi.$$

Повертаючись до змінних x і y , одержимо загальний розв'язок вихідного рівняння у вигляді

$$y = -C_1 x + x \arcsin x(C_2 x).$$

Розв'язок $p = 0$ дає $u = C$ або $y = Cx$; цей розв'язок виходить із загального, якщо в ньому покласти $C_2 = 0$.

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як інтегруються рівняння, які не містять невідомої функції?
2. Інтегрування рівнянь, що не залежать від незалежної змінної?
3. Як знижується порядок у однорідних рівнянь?
4. Розв'язати рівняння:

а) $x^2 y'' = (y')^2$, відповідь: $C_1 x - C_1^2 y = \ln|C_1 x + 1| + C_2$, $2y = x^2 + C$, $y = C$;

б) $y''(e^x + 1) + y' = 0$, відповідь: $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$;

в) $xy''' = y'' - xy''$, відповідь: $y = C_1(x + 2)e^{-x} + C_2x + C_3$;

г) $yy'' = (y')^2 - (y')^3$, відповідь: $y + C_1 \ln|y| = x + C_2$, $y = C$;

д) $(y')^2 + 2yy'' = 0$, відповідь: $y^3 = C_1(x + C_2)^2$, $y = C$;

є) $xyy'' + x(y')^2 = 2yy'$, відповідь: $y^2 = C_1x^3 + C_2$;

ж) $4x^2 y^3 y'' = x^2 - y^4$, відповідь: $4C_1 y^2 = 4x + x(C_1 \ln C_2 x)^2$.

5. У наступних рівняннях знайти розв'язки, що задовольняють початкові умови:

а) $yy'' = 2x(y')^2$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 0.5$, відповідь: $(3 - x)y^5 = 8(x + 2)$;

б) $y'' \cos y + (y')^2 \sin y = y'$, $y(-1) = \frac{\pi}{6}$, $y'(-1) = 2$,

відповідь: $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 2x + 2$.

РОЗДІЛ 3

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

3.1. Основні поняття і означення

Означення. Диференціальне рівняння n -го порядку називається лінійним, якщо воно першого степеня відносно шуканої функції y та її похідних $y', \dots, y^{(n)}$, тобто має вигляд

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (3.1)$$

де $a_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) та $f(x)$ – відомі неперервні функції від x або сталі, причому $a_0(x) \neq 0$ для усіх значень x з тієї області, у якій розглядається рівняння (3.1).

У подальшому будемо припускати, що коефіцієнт $a_0(x) = 1$, якщо ж він не дорівнює одиниці, можна усі члени рівняння поділити на нього, щоб прийти до рівняння у якому коефіцієнт при старшій похідній дорівнює одиниці.

Функція $f(x)$, що стоїть у правій частині рівняння (3.1) називається *правою частиною рівняння*.

Рівняння (3.1) називається *лінійним неоднорідним рівнянням n -го порядку* або *рівнянням з правою частиною*. Якщо права частина рівняння (3.1), тобто функція $f(x) \equiv 0$, то рівняння має вигляд

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (3.2)$$

і називається *лінійним однорідним рівнянням n -го порядку*. При цьому, якщо рівняння (3.2) має ті ж коефіцієнти, що і (3.1), то воно називається *відповідним неоднорідному рівнянню (3.1)*.

Позначимо ліву частину рівняння (3.1) через

$$L_n[y] \equiv L[y].$$

Тоді вираз

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x)$$

називають *лінійним диференціальним оператором n -го порядку*. Запис $L[y]$ означає застосування до функції y сукупності операцій, вказаних у лівій частині рівняння (3.1) або (3.2).

Лінійний оператор має такі властивості:

- 1) $L[Cy] = CL[y]$ – однорідність;
- 2) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$ – адитивність.

Користуючись вказаними властивостями лінійного оператора, можна сформулювати такі твердження відносно розв'язків лінійного однорідного рівняння.

Твердження 1. Якщо функція $y = y(x)$ на деякому інтервалі є розв'язком рівняння (3.2), то розв'язком цього рівняння на тому ж інтервалі є і функція $y = Cx$, де C – довільна стала.

Твердження 2. Якщо функції $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ на деякому інтервалі є розв'язками рівняння (3.2), то розв'язком цього рівняння на тому ж інтервалі є і функція $y = y_1(x) + y_2(x)$.

З цих тверджень випливає наступна теорема.

Теорема 1. Якщо на деякому інтервалі функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ є розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння (3.2), то їх лінійна комбінація

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (3.3)$$

де C_i – довільні сталі, також є розв'язком рівняння (3.2) на тому ж інтервалі.

Відзначимо загальні властивості лінійних диференціальних рівнянь:

➤ рівняння залишається лінійним при довільній заміні незалежної змінної, наприклад

$$x = \varphi(t), \quad t = \psi(x);$$

➤ рівняння залишається лінійним при довільній лінійній заміні шуканої функції

$$y = \alpha(x)z + \beta(x),$$

де z – нова невідома функція, $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – неперервні разом зі своїми похідними до n -го порядку включно функції, причому $\alpha(x) \neq 0$ у інтервалі на якому розглядається рівняння.

Крім того слід зазначити, що підстановка

$$y = \alpha(x)z$$

завжди зводить рівняння (3.1) і (3.2) до рівняння, яке не містить члена з похідною $(n-1)$ -го порядку.

Справді, оскільки

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \alpha z^{(n)} + n\alpha' z^{(n-1)} + \dots, \\ y^{(n-1)} &= \alpha z^{(n-1)} + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

то після підстановки їх у рівняння (3.2) дістанемо

$$\alpha z^{(n)} + (n\alpha' + a_1(x)\alpha)z^{(n-1)} + \dots = 0.$$

Для того щоб позбутися доданка з $z^{(n-1)}$, виберемо $\alpha(x)$ так, щоб

$$n\alpha' + a_1(x)\alpha = 0,$$

для чого досить взяти

$$\alpha(x) = e^{-\frac{1}{n} \int a_1(x) dx}.$$

Отже, підстановка

$$y = z \cdot e^{-\frac{1}{n} \int a_1(x) dx}$$

зводить рівняння (3.2) до рівняння, яке не містить члена з похідною $(n-1)$ -го порядку.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яке диференціальне рівняння називається лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку?
2. Яке диференціальне рівняння n -го порядку називається лінійним неоднорідним?
3. Яке диференціальне рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням n -го порядку?
4. Що називають лінійним диференціальним оператором n -го порядку?
5. Які властивості має лінійний оператор?
6. Які існують твердження відносно розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку?
7. Назвіть загальні властивості лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку?
8. Яка підстановка завжди зводить лінійне диференціальне рівняння n -го порядку до рівняння, яке не містить члена з похідною $(n-1)$ -го порядку?

3.2. Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку

Лінійна залежність функцій. Вертаючись до теореми 1 цілком природним виникає питання: оскільки розв'язок (3.3) містить n довільних сталих, то чи буде він загальним розв'язком рівняння (3.2)? Відповідь на це питання пов'язана з поняттям лінійної залежності функцій.

Означення. Функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ називаються лінійно залежними на деякому проміжку, якщо існують сталі величини $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такі, що на тому ж проміжку

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0,$$

при цьому хоч одна з величин $\alpha_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Якщо ж тотожність виконується тільки за умови, що $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$, то функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x)$ називаються лінійно незалежними на цьому проміжку.

У більш загальному випадку, що стосується лінійної залежності, мають місце такі твердження.

Теорема 2. Якщо функції

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \quad (3.4)$$

що мають в інтервалі (a, b) похідні до $(n-1)$ -го порядку включно, лінійно залежні, то визначник

$$W(x) = W(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

на цьому проміжку тотожно дорівнює нулю.

Даний визначник називають *детермінантом (визначником) Вронського*, побудованим для системи функцій (3.4).

Зауваження. Згідно з теоремою 2, якщо $W(x) \neq 0$ хоча б в одній точці інтервалу (a, b) , то функції (3.4) лінійно незалежні на (a, b) .

Розглянемо ряд прикладів.

Приклад 1. Система функцій

$$1, x, \dots, x^{n-1}$$

лінійно незалежна на довільному інтервалі (a, b) , оскільки

$$W(1, x, x^2, \dots, x^{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 0 & 1 & 2x & \dots & (n-1)x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)! \end{vmatrix} = 1 \cdot 1! \cdot 2! \dots (n-1)! \neq 0.$$

До того ж ця система лінійно незалежна на будь-якому інтервалі. Справді, внаслідок теореми з алгебри рівність

$$C_1 + C_2x + C_3x^2 + \dots + C_nx^{n-1} = 0$$

виконується не більш ніж у $(n-1)$ точці на осі Ox .

Приклад 2. Функції

$$e^{k_1x}, e^{k_2x}, \dots, e^{k_nx}$$

лінійно незалежні на будь-якому інтервалі (a, b) , якщо $k_1, k_2, \dots, k_n$ – різні числа (дійсні або комплексні).

Справді,

$$W(e^{k_1x}, e^{k_2x}, \dots, e^{k_nx}) = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & \dots & e^{k_nx} \\ k_1 e^{k_1x} & k_2 e^{k_2x} & \dots & k_n e^{k_nx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} e^{k_1x} & k_2^{n-1} e^{k_2x} & \dots & k_n^{n-1} e^{k_nx} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+k_2+\dots+k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ k_1 & \dots & k_n \\ \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

оскільки останній визначник є визначником Вандермонда, який при різних $k_1, k_2, \dots, k_n$ не дорівнює нулю.

Приклад 3. Функції

$$e^{kx}, xe^{kx}, \dots, x^{n-1}e^{kx}$$

лінійно незалежні на довільному інтервалі (a, b) . Оскільки $e^{kx} \neq 0$ і

$$C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} + \dots + C_n x^{n-1} e^{kx} = e^{kx} (C_1 + C_2 x + \dots + C_n x^{n-1}),$$

то лінійна незалежність даних функцій випливає з прикладу 1.

Для двох функцій можна дати більш простий критерій лінійної незалежності.

Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні на інтервалі (a, b) , якщо їх відношення на цьому інтервалі тотожно не дорівнює сталій величині

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const};$$

якщо

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv \text{const},$$

то функції лінійно залежні

Теорема 3. Якщо лінійно незалежні функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ є розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння (3.2) на відрізку $a \leq x \leq b$, то визначник Вронського, побудований для цих функцій, у кожній точці відрізка $a \leq x \leq b$ не дорівнює нулю.

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Теорема 4 (про структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння). Загальним розв'язком на відрізку $a \leq x \leq b$ лінійного однорідного диференціального рівняння (3.2) з неперервними коефіцієнтами $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) є лінійна комбінація

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x) \quad (3.5)$$

з n лінійно незалежних на тому ж відрізку частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ рівняння (3.2) з довільними сталими коефіцієнтами.

Доведення. Оскільки для рівняння (3.2) справджуються умови теореми про існування та єдиність розв'язку, то для того, щоб довести, що розв'язок (3.5) рівняння (3.2) є його загальним розв'язком, тобто містить всі без виключення частинні розв'язки рівняння (3.2), досить впевнитись в тому, що для довільних початкових умов

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (3.6)$$

де x_0 – будь-яка точка відрізка $a \leq x \leq b$, знайдуться такі значення сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, що розв'язок (3.5) задовольняє умови (3.6).

Для знаходження згаданих сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, скориставшись початковими умовами (3.6), дістанемо систему

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_i y_i(x_0) &= y_0, \\ \sum_{i=1}^n C_i y'_i(x_0) &= y'_0, \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n C_i y_i^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)}, \end{aligned}$$

визначником якої є визначник Вронського, побудований для n лінійно незалежних розв'язків рівняння (3.2). Отже, ця система має відмінний від нуля розв'язок при будь-якому x_0 з відрізка $a \leq x \leq b$ та довільній правій частині. Теорему доведено.

Із сформульованої теореми, а також з теореми про існування та єдиність розв'язку випливає, що найбільша кількість лінійно незалежних частинних розв'язків однорідного лінійного диференціального рівняння дорівнює його порядку.

Означення. Довільні n лінійно незалежні частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку, називаються його фундаментальною системою розв'язків.

Таким чином, щоб побудувати загальний розв'язок однорідного рівняння (3.2), досить знайти фундаментальну систему розв'язків цього рівняння. Тоді лінійна комбінація цієї системи і буде загальним розв'язком.

Теорема 5. Для всякого лінійного однорідного диференціального рівняння існує фундаментальна система розв'язків.

Доведення. Справді, візьмемо будь-яку систему таких n^2 довільних чисел a_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$), щоб складений з них визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

був відмінний від нуля. Визначимо n частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ рівняння (3.2) початковими умовами: при $x = x_0$ маємо $y_i(x_0) = a_{1i}, y_i'(x_0) = a_{2i}, \dots, y_i^{(n-1)}(x_0) = a_{ni}$.

Тоді визначник (3.7) представляє значення визначника Вронського $W(y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0))$. Таким чином, $W(x)$ не дорівнює нулю при $x = x_0$, звідки в силу теореми 2, випливає, що $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ лінійно незалежні, тобто утворюють фундаментальну систему. *Теорему доведено.*

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У якому разі систему функцій називають лінійно незалежною на деякому інтервалі?
2. Яка система функцій називається лінійно залежною?
3. Який визначник називають визначником (детермінантом) Вронського? Чому він повинен дорівнювати для системи лінійно залежних функцій?
4. Як формулюється теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку?
5. Чому дорівнює визначник Вронського, якщо лінійно незалежні функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ є розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку на деякому відрізку?
6. Який існує критерій лінійної незалежності для двох функцій?
7. Що називається фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку?
8. Чи для всякого лінійного однорідного диференціального рівняння існує фундаментальна система розв'язків?
9. Довести, що функції

$$y_1 = \sin^2 x, \quad y_2 = \cos^2 x, \quad y_3 = 1$$

лінійно залежні в інтервалі $(-\infty, +\infty)$.

10. Показати, що в інтервалі $(-\infty, +\infty)$ функції

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}$$

є лінійно незалежні.

3.3. Формула Остроградського – Ліувілля та її застосування до знаходження загального розв'язку однорідного рівняння

Розглянемо таку задачу: у деякому інтервалі $a < x < b$ дана фундаментальна система розв'язків

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x); \quad (3.8)$$

треба побудувати відповідне диференціальне рівняння.

Для цього дорівнюємо нулю наступний визначник Вронського, у якому y позначає невідому функцію:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n, y) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.9)$$

Розкладаючи його по елементам останнього стовпця, ми переконуємося у тому, що рівність (3.9) являє собою однорідне диференціальне рівняння n -го порядку відносно функції y . Підставляючи замість y функції y_i ($i = 1, 2, \dots, n$), одержимо визначник з двома рівними стовпцями. Він тотожно дорівнює нулю; отже, рівняння (3.9) має частинні розв'язки (3.8).

Коефіцієнт при $y^{(n)} \in W(y_1, y_2, \dots, y_n)$; він, як нам відомо, не дорівнює нулю в інтервалі $a < x < b$. Поділивши на нього обидві частини рівняння (3.9), одержимо рівняння n -го порядку виду (3.2). Задача, таким чином розв'язана.

Запишемо рівняння (3.9) у розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} y^{(n)} & \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - y^{(n-1)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} + \dots \\ & \dots + (-1)^n y \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Це рівняння тотожне рівнянню (3.2). Зрівнюючи коефіцієнти при однакових похідних, маємо для $a_1(x)$:

$$a_1(x) = - \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2, \dots, y_n)}.$$

Визначник, що стоїть у чисельнику є похідна від визначника Вронського, який стоїть у знаменнику. Дійсно, візьмемо похідну від $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ по x :

$$\begin{aligned} \frac{dW(y_1, y_2, \dots, y_n)}{dx} &= \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots \\ &\dots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Оскільки $(n-1)$ перші визначники мають по два однакових рядки, то вони дорівнюють нулю.

Таким чином,

$$a_1(x) = - \frac{W'(x)}{W(x)}. \quad (3.10)$$

Вважаючи функцію $a_1(x)$ заданою, а вронскіан $W(x)$ невідомим, та інтегруючи рівняння (3.10) відносно $W(x)$, дістанемо

$$W(x) = Ce^{-\int a_1(x)dx}, \quad (3.11)$$

де C – довільна стала.

Якщо разом з рівнянням (3.10) задати початкову умову, $W(x_0) = W_0$, то з (3.11) матимемо

$$W(x) = W_0 e^{-\int_{x_0}^x a_1(x) dx}. \quad (3.12)$$

Рівність (3.12), що дає можливість знаходити визначник Вронського через коефіцієнт при $y^{(n-1)}$ даного рівняння, називають *формулою Остроградського – Ліувілля*.

Застосуємо формулу Остроградського – Ліувілля до знаходження загального розв'язку однорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (3.13)$$

у якого нам відомий один частинний розв'язок y_1 .

Нехай y є будь-який розв'язок (відмінний від y_1) рівняння (3.13). Тоді визначник Вронського $W(y, y_1)$, згідно з (3.12), буде мати вигляд

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int a_1(x) dx}.$$

Звідси одержуємо для y лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$y_1 y' - y_1' y = Ce^{-\int a_1(x) dx}.$$

Поділивши обидві частини на y_1^2 , матимемо

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{y_1} \right) = \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int a_1(x) dx},$$

звідки y визначається квадратурою:

$$y = y_1 \left[\int \frac{Ce^{-\int a_1(x) dx}}{y_1^2} dx + C_1 \right]. \quad (3.14)$$

Одержаний розв'язок містить дві довільні сталі, а значить є загальним для рівняння (3.13). Отже, якщо відомий один частинний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку, загальний розв'язок знаходиться квадратурами за допомогою формули (3.14), яка зветься *формулою Абеля*.

Приклад. Показати, що функції $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = e^x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків деякого лінійного однорідного рівняння третього порядку. Скласти це рівняння.

Розв'язання. Функції y_1, y_2, y_3 будуть фундаментальною системою розв'язків деякого лінійного однорідного рівняння третього порядку, якщо визначник Вронського $W(y_1, y_2, y_3) \neq 0$ (згідно з означеннями п. 3.2).

Знайдемо $W(y_1, y_2, y_3)$:

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2, y_3) &= \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} + e^x \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = -2(xe^x - e^x) + e^x(2x^2 - x^2) = \\ &= e^x[(x-1)^2 + 1] \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Отже, дані функції утворюють фундаментальну систему розв'язків деякого лінійного однорідного рівняння третього порядку. Це рівняння, як було доведено, має вигляд (3.9). Тоді матимемо

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & e^x & y \\ 1 & 2x & e^x & y' \\ 0 & 2 & e^x & y'' \\ 0 & 0 & e^x & y''' \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладаючи визначник за елементами останнього стовпця, одержимо

$$y''' \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{vmatrix} - y'' \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} + y' \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 0 & 2 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = 0,$$

або остаточно шукане рівняння

$$(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, якщо відомий один частинний розв'язок цього рівняння $y_1 = x$

Розв'язання. Скористаємося формулою Абеля (3.14). Тоді для загального розв'язку рівняння, будемо мати

$$y = x \left[\int \frac{C e^{-\int \frac{-2x}{(x^2+1)} dx}}{x^2} dx + C_1 \right] = x \left[\int \frac{C(x^2+1)}{x^2} dx + C_1 \right] = C(x^2 - 1) + C_1 x.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y = C(x^2 - 1) + C_1 x.$$

ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Знайти загальні розв'язки даних рівнянь, якщо відомі їх частинні розв'язки:

$$\text{а) } x^2(x+1)y'' - 2y = 0, \quad y_1 = 1 + \frac{1}{x},$$

відповідь: $y = C_1\left(1 + \frac{1}{x}\right) + C_2\left(\frac{x}{2} + 1 - \frac{x+1}{x} \ln|x+1|\right);$

б) $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0, y_1 = \operatorname{tg} x,$

відповідь: $y = C_1 \operatorname{tg} x + C_2(1 + x \operatorname{tg} x);$

в) $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0, y_1 = e^x - 1,$

відповідь: $y = C_1(e^x - 1) + \frac{C_2}{e^x + 1}.$

2. Скласти лінійні однорідні диференціальні рівняння, які мають дані частинні розв'язки:

а) $y_1 = x, y_2 = e^x,$

відповідь: $(x-1)y'' - xy' + y = 0;$

б) $y_1 = 1, y_2 = \cos x,$

відповідь: $y'' - y' \operatorname{ctg} x = 0;$

в) $y_1 = 3x, y_2 = x - 2, y_3 = e^x + 1,$ відповідь: $y''' - y'' = 0.$

3.4. Зниження порядку лінійного однорідного диференціального рівняння

Лінійне однорідне диференціальне рівняння виду (3.2) відноситься до класу рівнянь, однорідних відносно $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, тобто до виду (2.25), тому підстановка (2.26) зводить його до рівняння порядку $(n-1)$. Але ця підстановка у багатьох випадках недоцільна, оскільки перетворене рівняння вже не є лінійним, отже, втрачає ті прості властивості, що характеризують лінійні рівняння.

Виходячи з цього, розглянемо метод зниження порядку лінійного однорідного диференціального рівняння, якщо відомі його частинні розв'язки. При цьому виявиться, що кожний відомий частинний розв'язок дозволяє знизити порядок рівняння на одиницю, причому перетворене рівняння залишається лінійним.

Спочатку покажемо, що коли відомо один ненульовий частинний розв'язок y_1 рівняння (3.2), то можна знизити порядок цього рівняння на одиницю.

Введемо в (3.2) нову невідому функцію $u = u(x)$ за формулою

$$y = y_1 \int u dx, \quad u = \left(\frac{y}{y_1} \right)'. \quad (3.15)$$

Тоді

$$\begin{aligned}
y' &= y_1' \int u dx + y_1 u, \\
y'' &= y_1'' \int u dx + 2y_1' u + y_1 u', \\
&\dots\dots\dots, \\
y^{(n)} &= y_1^{(n)} \int u dx + n y_1^{(n-1)} u + \frac{n(n-1)}{2!} y_1^{(n-2)} u' + \dots + y_1 u^{(n-1)}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

і рівняння (3.2) набирає вигляду

$$L[y_1] \int u dx + b_{n-1}(x)u + b_{n-2}(x)u' + \dots + b_1(x)u^{(n-2)} + y_1 u^{(n-1)} = 0,$$

де функціями $b_{n-1}(x)$, $b_{n-2}(x)$, ..., $b_1(x)$ позначена сума доданків при u , u' , ..., $u^{(n-2)}$ відповідно.

Оскільки $L[y_1] = 0$, то для u маємо лінійне однорідне рівняння $(n-1)$ -го порядку

$$u^{(n-1)} + \tilde{b}_1(x)u^{(n-2)} + \dots + \tilde{b}_{n-2}(x)u' + \tilde{b}_{n-1}(x)u = 0, \tag{3.17}$$

де $\tilde{b}_1(x) = \frac{b_1(x)}{y_1}$, ..., $\tilde{b}_{n-2}(x) = \frac{b_{n-2}(x)}{y_1}$, $\tilde{b}_{n-1}(x) = \frac{b_{n-1}(x)}{y_1}$ – неперервні функції в інтервалі (a, b) , крім можливо, тих точок, де y_1 перетворюється в нуль.

Якщо $u_2, \dots, u_n$ – фундаментальна система розв'язків рівняння (3.17), то функції

$$y_1, y_1 \int u_2 dx, \dots, y_1 \int u_n dx \tag{3.18}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (3.2).

Справді, з вище сказаного випливає, що всі функції (3.18) є розв'язками рівняння (3.2). Припустимо, що вони лінійно залежні. Тоді матимемо тотожність

$$C_1 y_1 + C_2 y_1 \int u_2 dx + \dots + C_n y_1 \int u_n dx = 0,$$

причому не всі $C_2, \dots, C_n$ дорівнюють нулю, бо в противному разі й $C_1 = 0$, оскільки $y_1 \neq 0$. Скорочуючи тотожність на y_1 і диференціюючи по x , дістаємо

$$C_2 u_2 + \dots + C_n u_n = 0,$$

тобто $u_2, \dots, u_n$ лінійно залежні, що суперечить припущенню.

Отже, $C_2 = C_3 = \dots = C_n = 0$, оскільки $y_1 \neq 0$. Тоді $C_1 = 0$ і $y_1, y_2, \dots, y_n$ утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Таким чином, дійсно, якщо відомо один частинний розв'язок рівняння (3.2), то задача інтегрування цього рівняння зводиться до інтегрування лінійного однорідного рівняння порядку $n-1$.

Зазначимо, що підстановку (3.15) можна виконувати поступово: спочатку ввести $y = y_1 v$, а потім $v' = u$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Розв'язання. Це рівняння має частинний розв'язок $y_1 = x$. Тоді, застосовуючи до нього підстановку (3.15), матимемо

$$y = x \int u \, dx.$$

Далі знаходимо

$$y' = \int u \, dx + xu,$$

$$y'' = 2u + xu',$$

$$y''' = 3u' + xu''.$$

Тепер задане рівняння набирає вигляду

$$x(x^2 - 2x + 2)u'' + (3(x^2 - 2x + 2) - x^3)u' = 0.$$

Останнє рівняння належить до типу (2.20), тому здійснюючи заміну $u' = z$, одержимо

$$\frac{dz}{dx} + \left(\frac{3}{x} - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2} \right) z = 0.$$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо

$$\ln z = \ln C - 3 \ln x + \int \frac{x^2 dx}{x^2 - 2x + 2}.$$

Обчислюємо у правій частині інтеграл

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2 - 2x + 2} = \int \left(1 + \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} \right) dx = x + \ln(x^2 - 2x + 2).$$

Таким чином,

$$\ln z = \ln C - 3 \ln x + x + \ln(x^2 - 2x + 2),$$

або

$$z = \frac{Ce^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$$

Інтегруємо цю рівність двічі:

$$u = C_1 + \int z \, dx = C_1 + \frac{Ce^x(x-1)}{x^2},$$

$$\int u \, dx = C_2 + C_1 x + C \int \frac{e^x(x-1)}{x^2} dx = C_2 + C_1 x + \frac{Ce^x}{x}.$$

Загальний інтеграл заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y = x \int u \, dx = C_2 x + C_1 x^2 + Ce^x.$$

Якщо відомо k лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (3.2), $y_1, y_2, \dots, y_k$, то порядок цього рівняння можна знизити на k одиниць. При цьому здобує рівняння $(n - k)$ -го порядку залишається лінійним і однорідним.

Справді, виконуючи підстановку (3.15), дістанемо для u рівняння (3.17) порядку $(n - 1)$. Рівняння (3.17) має $(k - 1)$ розв'язок, які знаходяться за формулою (3.15) поступовою заміною y на $y_2, y_3, \dots, y_k$:

$$u_2 = \left(\frac{y_2}{y_1} \right)', u_3 = \left(\frac{y_3}{y_1} \right)', \dots, u_k = \left(\frac{y_k}{y_1} \right)'.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, бо в протилежному разі мали б тотожність

$$C_2 u_2 + \dots + C_k u_k = 0,$$

де не всі $C_2, \dots, C_k$ дорівнюють нулю. Інтегруючи цю тотожність, дістали б

$$C_1 + C_2 \int u_2 dx + \dots + C_k \int u_k dx = 0,$$

звідки

$$C_1 + C_2 \frac{y_2}{y_1} + \dots + C_k \frac{y_k}{y_1} = 0,$$

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_k y_k = 0,$$

що неможливо, оскільки $y_1, y_2, \dots, y_k$ – лінійно незалежні.

Тепер введемо нову функцію v :

$$u = u_2 \int v dx, \text{ або } v = \left(\frac{u}{u_2} \right)'.$$

Тоді для v дістанемо рівняння $(n-2)$ -го порядку, для якого відомо $(k-2)$ лінійно незалежних розв'язків:

$$v_3 = \left(\frac{u_3}{u_2} \right)', \dots, v_k = \left(\frac{u_k}{u_2} \right)'.$$

Продовжуючи так і далі, дістанемо лінійне однорідне рівняння $(n-k)$ -го порядку.

Отже, якщо відомо $(n-1)$ лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (3.2), то поступово дістаємо лінійне однорідне рівняння першого порядку, що дає змогу проінтегрувати рівняння (3.2) в квадратурах.

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. На скільки і за допомогою якої підстановки можна знизити порядок лінійного однорідного диференціального рівняння, якщо відомо один його частинний розв'язок?

2. У якому випадку лінійне однорідне диференціальне рівняння n -го порядку можна звести до лінійного однорідного рівняння першого порядку?

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0,$$

якщо відомі два його частинних розв'язки: $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$.

Відповідь: $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$.

4. Знизити порядок диференціального рівняння

$$xy''' - y'' + xy' - y = 0,$$

і знайти його загальний розв'язок, якщо відомий частинний розв'язок $y_1 = x$.

Відповідь: $y = C_1x + C_2 \sin x + C_3 \cos x$.

3.5. Лінійні неоднорідні рівняння. Метод варіації довільних сталих

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (3.1) у вигляді

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (3.19)$$

де $f(x) \neq 0$.

Лінійне однорідне рівняння з тими же коефіцієнтами, але з правою частиною, яка дорівнює нулю,

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (3.20)$$

називається, як було зазначено вище, однорідним рівнянням, відповідним неоднорідному рівнянню (3.19). Тоді відносно загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 6 (про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку). Загальним розв'язком $y_{\text{зн}}(x)$ лінійного неоднорідного рівняння (3.19) є сума будь-якого його частинного розв'язку $y_{\text{чн}}(x)$ і загального розв'язку $y_{\text{зо}}(x)$ відповідного однорідного рівняння (3.20), тобто

$$y_{\text{зн}}(x) = y_{\text{чн}}(x) + y_{\text{зо}}(x), \quad y_{\text{зо}}(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x),$$

або

$$y_{\text{зн}}(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x) + y_{\text{чн}}(x), \quad (3.21)$$

де $y_k(x)$ – як і раніше, частинні розв'язки однорідного рівняння (3.20).

Доведення. Справді,

$$L[y_{\text{зн}}(x)] = L\left[\sum_{k=1}^n C_k y_k(x) + y_{\text{чн}}(x)\right] = \sum_{k=1}^n C_k L[y_k(x)] + L[y_{\text{чн}}(x)]. \quad (3.22)$$

Оскільки $y_k(x)$ це частинні розв'язки однорідного рівняння (3.20), а $y_{\text{чн}}(x)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.19), то звідси випливає, що $L[y_k(x)] = 0$ і $L[y_{\text{чн}}(x)] = f(x)$. Отже, з (3.22) матимемо

$$L[y_{\text{зн}}(x)] = 0 + f(x) \equiv f(x),$$

тобто $y_{\text{зн}}(x)$ – розв'язок рівняння (3.19).

Якщо $y_{\text{зн}}(x)$ є довільним розв'язком рівняння (3.19), то

$$L[y_{\text{зн}}(x) - y_{\text{чн}}(x)] = L[y_{\text{зн}}(x)] - L[y_{\text{чн}}(x)] = f(x) - f(x) = 0,$$

і, таким чином, $y_{\text{зн}}(x) - y_{\text{чн}}(x)$ є розв'язком однорідного рівняння (3.20). Тоді існують такі числа C_k , що

$$y_{\text{зн}}(x) - y_{\text{чн}}(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x),$$

тобто для цих чисел виконується рівність (3.21).

Отже, кожний розв'язок рівняння (3.19), який задовольняє довільні початкові умови, можна дістати з функції (3.21), яка, таким чином, є загальним розв'язком рівняння (3.19). *Теорему доведено.*

При знаходженні частинних розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння (3.19) доцільно мати на увазі таку теорему.

Теорема 7. Частинний розв'язок $y_{\text{чн}}(x)$ рівняння

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x) \quad (3.23)$$

можна подати у вигляді суми

$$y_{\text{чн}}(x) = y_{1\text{чн}}(x) + y_{2\text{чн}}(x), \quad (3.24)$$

де $y_{1\text{чн}}(x)$, $y_{2\text{чн}}(x)$ – відповідно частинні розв'язки рівнянь

$$L[y] = f_1(x) \text{ і } L[y] = f_2(x).$$

Доведення. Справді, оскільки

$$L[y_{1\text{чн}}(x)] = f_1(x),$$

$$L[y_{2\text{чн}}(x)] = f_2(x),$$

то додаючи ці рівності, дістаємо

$$L[y_{1\text{чн}}(x)] + L[y_{2\text{чн}}(x)] = f_1(x) + f_2(x),$$

або

$$L[y_{1\text{чн}}(x)] + L[y_{2\text{чн}}(x)] = L[y_{1\text{чн}}(x) + y_{2\text{чн}}(x)] = L[y_{\text{чн}}(x)] = f_1(x) + f_2(x).$$

Отже, сума (3.24) є розв'язком рівняння (3.23). *Теорему доведено.*

Звідси випливає *властивість суперпозиції або накладання розв'язків*: якщо функції $v_i(x)$ є розв'язками рівнянь $L[y] = f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, k$, тобто

$$L[v_i(x)] = f_i(x), \text{ то функція } v(x) = \sum_{i=1}^n C_i v_i(x), \quad C_i = \text{const}, \text{ є розв'язком}$$

$$\text{рівняння } L[y] = \sum_{i=1}^k C_i f_i(x).$$

Наприклад, нехай задано рівняння

$$2y'' - y' + 3y = 3 + 4e^x.$$

Якщо рівняння

$$2y'' - y' + 3y = 3 \text{ і } 2y'' - y' + 3y = 4e^x$$

мають частинні розв'язки $v_1(x) = 1$ та $v_2(x) = e^x$ відповідно, то функція

$$v(x) = 1 + e^x$$

є частинним розв'язком заданого рівняння.

Теорема 8. Якщо диференціальне рівняння (3.20) має розв'язок виду

$$u(x) + iv(x), \quad (3.25)$$

то кожна з функцій $u(x)$ та $v(x)$ є розв'язком рівняння (3.20).

Доведення. Справді, за адитивною властивістю оператора L маємо

$$L[u(x) + iv(x)] = L[u(x)] + L[iv(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)].$$

Оскільки функція (3.25) є розв'язком рівняння (3.20), то маємо

$$L[u(x) + iv(x)] = 0,$$

тобто

$$L[u(x)] + iL[v(x)] = 0. \quad (3.26)$$

З рівності (3.26) за відомою теоремою з вищої алгебри дістаємо тотожності

$$L[u(x)] = 0 \text{ і } L[v(x)] = 0.$$

Теорему доведено.

Можна також показати, що коли рівняння $L[y] = \varphi(x) + i\psi(x)$, де всі коефіцієнти $a_i(x)$ і функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ дійсні, має розв'язок $y = u(x) + iv(x)$, то тоді дійсна частина $u(x)$ і уявна частина $v(x)$ є відповідно розв'язками рівнянь

$$L[u] = \varphi(x) \text{ і } L[v] = \psi(x).$$

Отже, можна зробити такий висновок: для того, щоб знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку (3.19) достатньо знати загальний розв'язок однорідного рівняння (3.20) і будь-який частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.19).

Існує загальний метод розв'язування лінійного неоднорідного рівняння (3.19), який називається методом варіації довільних сталих, або методом Лагранжа. З'ясуємо суть цього методу.

Метод варіації довільних сталих. Нехай маємо загальний розв'язок однорідного рівняння (3.20) у вигляді

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (3.27)$$

де $y_1, y_2, \dots, y_n$ – фундаментальна система розв'язків рівняння (3.20), а $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі.

Шукатимемо розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (3.19) у формі (3.27), розглядаючи величини $C_1, C_2, \dots, C_n$ не як довільні сталі, а як функції x , які треба визначити так, щоб в результаті вираз (3.27) визначав загальний розв'язок рівняння (3.19).

Для цього, диференціюючи (3.27) по x , матимемо

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n' + C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n.$$

Виберемо тепер $C_1, C_2, \dots, C_n$ так, щоб

Тоді y' матиме такий самий вигляд, як і у випадку сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, тобто

Диференціюючи ще раз, дістаємо

Нехай знову

Тоді

Продовжуючи диференціювати далі і підібравши величини $C_1, C_2, \dots, C_n$ так, щоб

дістанемо остаточно

Диференціюючи цю похідну ще раз, знайдемо

Підставимо тепер у рівняння (3.19) вираз для y і знайдені вирази для y' , y'' , ..., $y^{(n)}$. Тоді, в результаті певних перетворень, матимемо

Множники, що містяться в дужках при $C_1, C_2, \dots, C_n$, дорівнюють тотожно нулю, оскільки $y_1, y_2, \dots, y_n$ є частинними розв'язками рівняння (3.20). отже, останнє рівняння матиме вигляд

Звідси шукані функції $C_1, C_2, \dots, C_n$ задовольняють умови

Маємо систему n лінійних рівнянь з n невідомими $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, ..., $C_n'(x)$. Ця система має єдиний розв'язок, оскільки її визначник – це детермінант Вронського $W(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$.

$$\begin{cases} C'_1 = \varphi_1(x), \\ C'_2 = \varphi_2(x), \\ \\ C'_n = \varphi_n(x). \end{cases}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} C_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + \tilde{C}_1, \\ C_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + \tilde{C}_2, \\ \\ C_n(x) = \int \varphi_n(x) dx + \tilde{C}_n, \end{array} \right.$$
$$y = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2 + \dots + \tilde{C}_n y_n + y_1 \int \varphi_1(x) dx + y_2 \int \varphi_2(x) dx + \dots + y_n \int \varphi_n(x) dx. \quad (3.30)$$

120

Приклад. За допомогою метода варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$, якщо $y_{30}(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок даного рівняння у вигляді

$$y = C_1(x) \sin 2x + C_2(x) \cos 2x, \quad (3.31)$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ невідомі функції. Для знаходження цих функцій згідно з методом варіації довільних сталих складемо систему рівнянь виду (3.29)

$$\begin{cases} C_1' \sin 2x + C_2' \cos 2x = 0, \\ 2C_1' \cos 2x - 2C_2' \sin 2x = \frac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо $C_1' = \frac{1}{2}$, $C_2' = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$. Інтегруючи, дістаємо

$$C_1(x) = \frac{x}{2} + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + \tilde{C}_2.$$

Підставляючи значення $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у (3.31), одержимо загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння у вигляді

$$y = \tilde{C}_1 \sin 2x + \tilde{C}_2 \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \cdot \ln |\cos 2x|.$$

Приклад. Знайти за допомогою метода варіації довільних сталих загальний розв'язок рівняння

$$y''' - \frac{y''}{x} = x.$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку фундаментальну систему розв'язків (лінійно незалежні частинні розв'язки) відповідного однорідного рівняння

$$y''' - \frac{y''}{x} = 0. \quad (3.32)$$

Знизивши порядок цього рівняння за допомогою заміни $y'' = u$, де u – нова невідома функція, одержимо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними $u' - \frac{u}{x} = 0$, загальний розв'язок якого має вигляд $u = C_1 x$, де C_1 – довільна стала. Інтегруючи два рази по x , одержимо загальний розв'язок рівняння (3.32)

$$y_{30} = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3,$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі, а функції $y_1 = \frac{x^3}{6}$, $y_2 = x$, $y_3 = 1$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (3.32).

Загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння шукаємо методом варіації довільних сталих у вигляді

$$y = C_1(x) \frac{x^3}{6} + C_2(x) x + C_3(x), \quad (3.33)$$

де функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ визначаються із системи виду (3.29), яка у даному випадку має вигляд

$$\begin{cases} C_1'(x) \frac{x^3}{6} + C_2'(x)x + C_3' = 0, \\ C_1'(x) \frac{x^2}{2} + C_2'(x) = 0, \\ C_1'(x)x = x. \end{cases}$$

Звідси одержуємо $C_1'(x) = 1$, $C_2'(x) = -\frac{x^2}{2}$, $C_3'(x) = \frac{x^3}{3}$. Отже,

$$C_1(x) = x + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = -\frac{x^3}{6} + \tilde{C}_2, \quad C_3(x) = \frac{x^4}{12} + \tilde{C}_3.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння дістанемо підставивши одержані співвідношення для $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ у вираз (3.33), матимемо

$$y = \tilde{C}_1 \frac{x^3}{6} + \tilde{C}_2 x + \tilde{C}_3 + \frac{x^4}{12}.$$

Слід зауважити, що цей розв'язок можна одержати іншим способом (перевірити самостійно).

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = \sqrt{x}, \quad (3.34)$$

застосовуючи метод варіації довільних сталих.

Розв'язання. Знайдемо спочатку фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = 0, \quad (3.35)$$

Розв'язок рівняння (3.35) шукатимемо у вигляді многочлена $y = ax^n + \dots$. Підставивши цей розв'язок у (3.35) і виписуючи тільки члени, що містять старший степінь x , одержимо

$$an(n-1)(n-2)x^{n-3} - \frac{3}{x} an(n-1)x^{n-2} + \frac{6}{x^2} an x^{n-1} - \frac{6}{x^3} ax^n + \dots = 0.$$

Дорівнюючи нулю коефіцієнт при старшому степені x , знаходимо

$$n(n-1)(n-2) - 3n(n-1) + 6n - 6 = 0,$$

$$(n-1)(n^2 - 5n + 6) = 0,$$

звідки

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 3.$$

Отже, якщо рівняння (3.35) допускає розв'язок у вигляді многочлена, то цей многочлен може бути тільки многочленом першого, другого або третього степеня. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що кожний із многочленів $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$ є розв'язком рівняння (3.35). Оскільки функції x , x^2 , x^3 лінійно незалежні (приклад 1, п. 3.2), то система розв'язків $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$ є фундаментальною.

Загальний розв'язок рівняння (3.34), за методом Лагранжа, шукаємо у вигляді

$$y(x) = C_1(x)x + C_2(x)x^2 + C_3(x)x^3,$$

де функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ визначаються з системи

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x)x^2 + C_3'(x)x^3 = 0, \\ C_1'(x) + C_2'(x) \cdot 2x + C_3'(x) \cdot 3x^2 = 0, \\ C_2'(x) \cdot 2 + C_3'(x) \cdot 6x = \sqrt{x}. \end{cases} \quad (3.36)$$

З системи (3.36), одержуємо

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^3}, \quad C_2'(x) = -\sqrt{x}, \quad C_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

звідки

$$C_1(x) = \frac{1}{5}\sqrt{x^5} + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \tilde{C}_2, \quad C_3(x) = \sqrt{x} + \tilde{C}_3,$$

де $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, $\tilde{C}_3$ – довільні сталі.

Отже, загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y(x) = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2 x^2 + \tilde{C}_3 x^3 + \frac{8}{15}\sqrt{x^7}.$$

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку?
2. У чому полягає властивість суперпозиції або накладання розв'язків?
3. Суть методу варіації довільних сталих?
4. За методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівнянь:

а) $y'' - \frac{y'}{x} = x$, відповідь: $y = C_1 x^2 + C_2 - \frac{x^3}{3}$;

б) $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$, відповідь: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{\cos 2x}{2 \sin x}$;

в) $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$,

відповідь: $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \frac{8}{15}\sqrt{x^7} - \frac{5}{3}\sqrt{x^5} + \sqrt{x^3} - (x^3 - 2x^2 + x)\ln(\sqrt{x} + 1)$;

г) $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = \frac{x + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$,

відповідь: $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \frac{8}{15}\sqrt{x^7} + \frac{10}{3}\sqrt{x^5} - 2\sqrt{x^3} + (2x^3 - 4x^2 + 2x)\ln(\sqrt{x} + 1)$.

РОЗДІЛ 4

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ З СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

4.1. Лінійні однорідні рівняння вищого порядку з сталими коефіцієнтами і диференціальні рівняння, що зводяться до них

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння з сталими коефіцієнтами. Задача про знаходження загального розв'язку диференціального рівняння досить легко розв'язується для лінійних однорідних рівнянь виду

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (4.1)$$

де коефіцієнти a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – дійсні числа (сталі).

Метод розв'язування. Щоб розв'язати це рівняння, треба знайти яку-небудь його фундаментальну систему розв'язків

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x).$$

Тоді згідно з теоремою про структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (теорема 4, п. 3.2), загальним розв'язком рівняння (4.1) буде функція

$$y_{\text{зо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (4.2)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі.

Будемо шукати частинні розв'язки рівняння (4.1), користуючись методом Ейлера, у вигляді

$$y = e^{kx}, \quad (4.3)$$

де k – стала, яку потрібно знайти. Підставляючи (4.3) в ліву частину рівняння (4.1), матимемо

$$e^{kx} (a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0. \quad (4.4)$$

Рівняння (4.4) називають *характеристичним рівнянням*, яке відповідає диференціальному рівнянню (4.1). Воно алгебраїчне і, згідно з основною теоремою алгебри, має n коренів (з урахуванням кратності кожного з них), серед яких можуть бути як комплексні, так і дійсні. Розв'язавши його, знайдемо n частинних розв'язків рівняння (4.1), що мають вигляд (4.3).

Розглянемо окремо можливі випадки різних коренів характеристичного рівняння (4.4).

1. Корені характеристичного рівняння (4.4) – числа дійсні різні, тобто

$$k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_n.$$

У цьому випадку, згідно з формулою (4.3), маємо n частинних розв'язків рівняння (4.1)

$$e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}. \quad (4.5)$$

Раніше (приклад 2, п. 3.2) було доведено, що ці функції лінійно незалежні, тому система функцій (4.5) являє собою фундаментальну систему розв'язків рівняння (4.1). Тоді з формули (4.2) випливає, що загальним розв'язком рівняння (4.1) є функція

$$y_{\text{зо}} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}, \quad (4.6)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + 5y' - 6y = 0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння. Для цього достатньо в даному рівнянні замінити похідні різних порядків невідомої функції відповідними степенями k . У результаті матимемо

$$k^2 + 5k - 6 = 0,$$

звідки $k_1 = 1$, $k_2 = -6$. Тоді згідно з формулами (4.5), (4.6) загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд

$$y_{\text{зо}} = C_1 e^x + C_2 e^{-6x}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0.$$

Звідси $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$. Отже, загальним розв'язком заданого рівняння є функція

$$y_{\text{зо}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

2. Серед коренів характеристичного рівняння (4.4) є числа комплексні спряжені. Відомо, що коли алгебраїчне рівняння з дійсними коефіцієнтами має комплексний корінь $k_1 = \alpha + i\beta$, то воно має і спряжений з ним корінь $k_2 = \alpha - i\beta$. У цьому випадку у відповідність кореням k_1 і k_2 згідно з (4.5) можна поставити функції

$$e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Скориставшись формулами Ейлера

$$e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi,$$

знайдемо розв'язки

$$y_1 = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x),$$

$$y_2 = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

Згідно з теоремою 8 (п. 3.5) зробимо висновок, що комплексному кореню $k_1 = \alpha + i\beta$ відповідають два дійсних розв'язки рівняння (4.1):

$$y_{11} = e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ і } y_{12} = e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

причому вони лінійно незалежні. Спряжений корінь $k_2 = \alpha - i\beta$ також має два дійсних розв'язки, але вони такі самі (з точністю до знака), що й y_{11} , y_{12} .

Отже, кожній парі спряжених комплексних коренів характеристичного рівняння (4.4) відповідає два дійсних частинних розв'язки рівняння (4.1):

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ і } e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (4.7)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (4.1) в цьому разі матиме вигляд (4.6), якщо тільки в доданках, які відповідають комплексним кореням характеристичного рівняння (4.4), підставити дійсні функції (4.7) замість комплексних, що там є.

Приклад. Розв'язати рівняння $2y'' - 2y' + 5y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$2k^2 - 2k + 5 = 0$$

має корені $k_1 = \frac{1}{2} + i\frac{3}{2}$, $k_2 = \frac{1}{2} - i\frac{3}{2}$, тобто $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$.

Загальним розв'язком є функція

$$y_{30} = e^{x/2} \left(C_1 \cos \frac{3}{2}x + C_2 \sin \frac{3}{2}x \right).$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y^{(4)} - 6y''' + 12y'' + 6y' - 13y = 0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^4 - 6k^3 + 12k^2 + 6k - 13 = 0.$$

Звідси

$$k_1 = -1, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 3 + 2i, \quad k_4 = 3 - 2i.$$

Тоді загальний розв'язок має вигляд

$$y_{30} = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + e^{3x} (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x).$$

3. Корені характеристичного рівняння (4.4) – числа дійсні кратні (що повторюються). У цьому випадку число різних коренів рівняння (4.4) буде менше n і частинних розв'язків рівняння (4.1) вигляду $e^{k_i x}$ теж буде менше n , тобто вони не утворюють фундаментальну систему розв'язків. Отже, треба знати решту частинних розв'язків.

Визначимо спосіб знаходження всіх частинних розв'язків рівняння (4.1), які б складала його фундаментальну систему.

Позначимо через $F_n(k)$ ліву частину характеристичного рівняння (4.4), тобто

$$F_n(k) = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n.$$

Шукатимемо частинні розв'язки рівняння (4.1) у вигляді

$$y = ze^{kx}, \quad (4.8)$$

де k – корінь характеристичного рівняння; z – нова невідома функція від x , яку треба визначити так, щоб функція (4.8) була розв'язком лінійного однорідного рівняння (4.1), тобто виконувалася рівність

$$L[ze^{kx}] = 0. \quad (4.9)$$

Для того, щоб підставити функцію (4.8) у рівняння (4.1), обчислимо спочатку всі її похідні до n -го порядку включно, матимемо

$$\begin{aligned} y' &= e^{kx} (kz + z'), \\ y'' &= e^{kx} (k^2 z + 2kz' + z''), \\ y''' &= e^{kx} (k^3 z + 3k^2 z' + 3kz'' + z'''), \\ &\dots\dots\dots, \\ y^{(n-1)} &= e^{kx} \left(k^{n-1} z + (n-1)k^{n-2} z' + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} k^{n-3} z'' + \right. \\ &\quad \left. + \dots + (n-1)kz^{(n-2)} + z^{(n-1)} \right), \\ y^{(n)} &= e^{kx} \left(k^n z + n k^{n-1} z' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} k^{n-2} z'' + \dots + n k z^{(n-1)} + z^{(n)} \right). \end{aligned}$$

Тепер з (4.9) маємо

$$L[ze^{kx}] = e^{kx} \left(F_n(k) z + F'_n(k) z' + \frac{F''_n(k)}{1 \cdot 2} z'' + \dots + \frac{F_n^{(n-1)}(k)}{(n-1)!} z^{(n-1)} + z^{(n)} \right). \quad (4.10)$$

Якщо корінь k_1 характеристичного рівняння (4.4) має кратність $m_1 < n$, то, як відомо з алгебри,

$$F_n(k_1) = 0, F'_n(k_1) = 0, F''_n(k_1) = 0, \dots, F_n^{(m_1-1)}(k_1) = 0, F_n^{(m_1)}(k_1) \neq 0,$$

і вираз (4.10) матиме вигляд

$$L[ze^{k_1 x}] = e^{k_1 x} \left(\frac{F_n^{(m_1)}(k_1)}{m_1!} z^{(m_1)} + \frac{F_n^{(m_1+1)}(k_1)}{(m_1+1)!} z^{(m_1+1)} + \dots + z^{(n)} \right).$$

Отже, функція $y = ze^{k_1 x}$ буде розв'язком рівняння (4.1) тоді, коли

$$e^{k_1 x} \left(\frac{F_n^{(m_1)}(k_1)}{m_1!} z^{(m_1)} + \frac{F_n^{(m_1+1)}(k_1)}{(m_1+1)!} z^{(m_1+1)} + \dots + z^{(n)} \right) = 0.$$

Проте $e^{k_1 x}$ не дорівнює нулю; не дорівнює нулю й кожний з коефіцієнтів при $z^{(m_1)}$, $z^{(m_1+1)}$, ..., $z^{(n)}$. Тому, для того щоб функція $ze^{k_1 x}$ була розв'язком рівняння (4.1), повинні справджуватися рівності

$$z^{(m_1)} = 0, z^{(m_1+1)} = 0, \dots, z^{(n)} = 0.$$

Тут за z можна взяти функції

$$x, x^2, x^3, \dots, x^{m_1-1}.$$

Тоді частинними розв'язками рівняння (4.1), що відповідають кореню k_1 кратності m_1 , будуть функції

$$e^{k_1 x}, xe^{k_1 x}, x^2 e^{k_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{k_1 x}.$$

Так само кореню k_2 кратності m_2 відповідатимуть частинні розв'язки

$$e^{k_2 x}, xe^{k_2 x}, x^2 e^{k_2 x}, \dots, x^{m_2-1} e^{k_2 x}$$

і т. д.

У загальному випадку, коли характеристичне рівняння (4.4) має корені

k_1 кратності m_1 ,

k_2 кратності m_2 ,

.....,

k_p кратності m_p ,

$$m_1 + m_2 + \dots + m_p = n, m_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, p,$$

то їм відповідатиме система n різних частинних розв'язків рівняння (4.1):

$$e^{k_1 x}, xe^{k_1 x}, x^2 e^{k_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{k_1 x},$$

$$e^{k_2 x}, xe^{k_2 x}, x^2 e^{k_2 x}, \dots, x^{m_2-1} e^{k_2 x},$$

.....,

$$e^{k_p x}, xe^{k_p x}, x^2 e^{k_p x}, \dots, x^{m_p-1} e^{k_p x}.$$

Раніше (приклад 3, п. 3.2) було показано, що ця система функцій є лінійно незалежною, а отже, маємо фундаментальну систему розв'язків, лінійна комбінація яких дає загальний розв'язок:

$$y_{30} = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_{m_1} x^{m_1-1}) e^{k_1 x} + \\ + (C_{m_1+1} + C_{m_1+2} x + C_{m_1+3} x^2 + \dots + C_{m_1+m_2} x^{m_2-1}) e^{k_2 x} + \dots +$$

Як і раніше, згідно з теоремою 8 (п. 3.5), робимо висновок, що замість функцій $x^p e^{(\alpha+i\beta)x}$ і $x^p e^{(\alpha-i\beta)x}$ ($p = 0, 1, 2, \dots, m-1$), у фундаментальній системі можна взяти функції

$$x^p e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ і } x^p e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Таким чином, m -кратному комплексному кореню $\alpha + i\beta$ характеристичного рівняння (4.4) в загальному розв'язку відповідатимуть таких $2m$ членів:

$$e^{\alpha x} (C_{11} + C_{12}x + C_{13}x^2 + \dots + C_{1m}x^{m-1}) \cos \beta x$$

і

$$e^{\alpha x} (C_{21} + C_{22}x + C_{23}x^2 + \dots + C_{2m}x^{m-1}) \sin \beta x.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1 = 0$$

має корені

$$k_1 = k_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad k_3 = k_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, функція

$$y_{30} = e^{-x/2} \left((C_1 + C_2x) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + (C_3 + C_4x) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$$

є загальним розв'язком заданого рівняння.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(10)} + 2y^{(8)} - 2y^{(4)} - y'' = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$k^{10} + 2k^8 - 2k^4 - k^2 = 0$$

можна записати у вигляді

$$(k^4 + 2k + 1)(k^6 - k^2) = 0$$

або ж

$$k^2(k^2 - 1)(k^2 + 1)^3 = 0.$$

Це рівняння має корені

$$k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = 1, \quad k_5 = k_6 = k_7 = i, \quad k_8 = k_9 = k_{10} = -i.$$

Отже, загальний розв'язок розглядуваного рівняння має вигляд

$$y_{30} = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4e^x + (C_5 + C_6x + C_7x^2) \cos x + (C_8 + C_9x + C_{10}x^2) \sin x.$$

Таким чином, схему інтегрування лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку з сталими коефіцієнтами (4.1) можна розбити на три етапи.

1. Знаходження відповідного характеристичного рівняння виду (4.4).
2. Знаходження частинних розв'язків диференціального рівняння (4.1), які відповідають знайденим кореням характеристичного рівняння, причому

➤ кожен з дійсних і різних коренів, наприклад k_1 , дає частинний розв'язок $e^{k_1 x}$;

➤ кожна окрема пара комплексних коренів $\alpha + i\beta$ дає два частинних розв'язки $e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $e^{\alpha x} \sin \beta x$;

➤ кожен m -кратний корінь, як дійсний, так і комплексний, дає m частинних розв'язків, які можна дістати за допомогою множення частинних розв'язків $e^{k_1 x}$ або $e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $e^{\alpha x} \sin \beta x$ на $1, x, x^2, \dots, x^{m-1}$;

3. Множення кожного з цих розв'язків на довільну сталу і додавання результатів.

Здобута таким чином сума і буде загальним розв'язком заданого диференціального рівняння виду (4.1), який повністю визначається коренями відповідного характеристичного рівняння (4.4).

Отже, лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку з сталими коефіцієнтами завжди можна проінтегрувати в елементарних функціях, причому інтегрування зводиться до алгебраїчних операцій.

В загальному випадку лінійні диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами порядку вище першого проінтегрувати не вдається, тому виникає інтерес до лінійних рівнянь, які відповідною заміною зводяться до рівнянь з сталими коефіцієнтами.

Розглянемо деякі типи таких рівнянь.

Рівняння Ейлера. Це диференціальне рівняння виду

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \quad (4.12)$$

де a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) – сталі.

Рівняння (4.12) за допомогою заміни

$$x = e^t, \quad x > 0 \quad (4.13)$$

зводиться до лінійного однорідного рівняння з сталими коефіцієнтами.

Якщо $x < 0$, то треба взяти $x = -e^t$.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Розв'язання. Нехай $x = e^t$. Тоді

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} e^{-t}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) e^{-2t};$$

$$e^{2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) e^{-2t} - 2e^t \frac{dy}{dt} e^{-t} + 2y = 0,$$

або

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

Характеристичне рівняння має корені $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Отже,

$$y_{30} = C_1 e^t + C_2 e^{2t}.$$

Оскільки $t = \ln x$, то загальним розв'язком заданого рівняння є функція

$$y = C_1 x + C_2 x^2.$$

На практиці буває зручніше не застосовувати заміну (4.13) до рівняння Ейлера (4.12), щоб звести його до рівняння виду (4.1), а безпосередньо шукати частинні розв'язки у вигляді

$$y = (e^t)^k = x^k, \quad (4.14)$$

де k – стала величина. Підставивши шуканий розв'язок (4.14) у рівняння (4.12) і скоротивши на x^k , дістанемо рівняння n -го степеня відносно k :

$$a_0 k(k+1)(k-2)\dots(k-n+1) + \\ + a_1 k(k-1)\dots(k-n+2) + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

Якщо корені $k_1, k_2, \dots, k_n$ цього рівняння всі різні, то маємо n лінійно незалежних розв'язків рівняння (4.12):

$$y_1 = x^{k_1}, y_2 = x^{k_2}, \dots, y_n = x^{k_n}.$$

Загальний інтеграл

$$y = C_1 x^{k_1} + C_2 x^{k_2} + \dots + C_n x^{k_n}.$$

Якщо серед коренів є рівні, наприклад, $k_1 = k_2 = \dots = k_r$, то відповідними частинними розв'язками будуть

$$y_1 = x^{k_r}, y_2 = x^{k_r} \ln x, \dots, y_n = x^{k_r} (\ln x)^{r-1}.$$

Розглянемо випадок комплексних коренів. Якщо $k_1 = \alpha + i\beta$, то існує $k_2 = \alpha - i\beta$. Відповідно частинними розв'язками будуть

$$y_1 = x^{\alpha+i\beta} = x^\alpha e^{i\beta \ln x} = x^\alpha (\cos \beta \ln x + i \sin \beta \ln x);$$

$$y_2 = x^\alpha (\cos \beta \ln x - i \sin \beta \ln x).$$

Оскільки дійсна і уявна частини є лінійно незалежними розв'язками, то загальний інтеграл матиме вигляд

$$y = x^\alpha (C_1 \cos \beta \ln x + C_2 \sin \beta \ln x) + C_3 x^{k_3} + \dots + C_n x^{k_n}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $x^2 y'' + 6xy' + 4y = 0$.

Розв'язання. Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді $y = x^k$. Тоді одержимо

$$x^2 k(k-1)x^{k-2} + 6kx^{k-1} + 4x^k = 0.$$

Поділивши останнє співвідношення на x^k , дістанемо рівняння

$$k^2 + 5k + 4 = 0.$$

Звідси $k_1 = -1$, $k_2 = -4$.

Загальний розв'язок

$$y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-4}.$$

Рівняння Лагранжа. Воно має вигляд

$$a_0(bx + d)^n y^{(n)} + a_1(bx + d)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x). \quad (4.15)$$

Частинні розв'язки рівняння (4.15) можна шукати у вигляді

$$y = (bx + d)^k,$$

або ж звести його до рівняння з сталими коефіцієнтами заміною

$$bx + d = e^t, \text{ якщо } bx + d > 0$$

і

$$bx + d = -e^t, \text{ якщо } bx + d < 0.$$

Рівняння Чебишова. Це рівняння виду

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0. \quad (4.16)$$

Заміною $x = \cos t$ рівняння (4.16) зводиться до рівняння

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0,$$

загальний розв'язок якого

$$y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt.$$

Повертаючись до початкової змінної x , матимемо остаточно

$$y = C_1 \cos(n \arccos x) + C_2 \sin(n \arccos x).$$

Частинний розв'язок

$$y = \cos(n \arccos x)$$

при цілому додатному n являє собою так званий поліном Чебишова степеня n , оскільки $\cos n\varphi$ можна записати як многочлен від $\cos \varphi$.

Можна показати, що коли лінійне рівняння зводиться перетворенням незалежної змінної до лінійного рівняння з сталими коефіцієнтами, то тільки підстановкою

$$t = C \int \sqrt[n]{a_n(x)} dx,$$

де C – деяка стала.

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. До чого зводиться метод Ейлера побудови фундаментальної системи розв'язків однорідного лінійного рівняння з сталими коефіцієнтами?
2. Яке рівняння називають характеристичним рівнянням?

3. Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння з сталими коефіцієнтами у випадку дійсних різних коренів характеристичного рівняння?

4. Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння з сталими коефіцієнтами у випадку комплексних спряжених коренів характеристичного рівняння?

5. Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння з сталими коефіцієнтами у випадку дійсних кратних коренів характеристичного рівняння?

6. Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння з сталими коефіцієнтами у випадку комплексних спряжених кратних коренів характеристичного рівняння?

7. Яка схема інтегрування лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку з сталими коефіцієнтами?

8. Які рівняння відповідною заміною можна звести до рівнянь з сталими коефіцієнтами?

9. Розв'язати рівняння:

а) $y^{(5)} + 4y''' = 0$,

відповідь: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x$;

б) $y'' - 7y' + 6y = 0$, відповідь: $y = C_1e^x + C_2e^{6x}$;

в) $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$,

відповідь: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$;

г) $y^{(5)} + 9y''' = 0$,

відповідь: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x$;

д) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$,

відповідь: $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$.

10. Знайти частинні розв'язки рівнянь, що задовольняють задані початкові умови:

а) $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,

відповідь: $y = xe^{5x}$;

б) $y''' + y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$

відповідь: $y = 1 + \cos x$.

11. Розв'язати рівняння Ейлера:

а) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, відповідь: $y = C_1x^2 + C_2x^3$;

б) $x^3y''' + xy' - y = 0$,

відповідь: $y = x(C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 \ln^2|x|)$;

в) $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3$,

відповідь: $y = x(C_1 + C_2 \ln|x|) + 2x^3$.

4.2. Рівняння Бесселя

Рівняння Бесселя має вигляд

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \eta^2) y = 0, \quad (4.17)$$

де η – довільне стале число. До цього рівняння приходимо при дослідженні багатьох прикладних задач. Покажемо, що при $\eta = 0,5$ рівняння Бесселя зводиться до рівняння з сталими коефіцієнтами та інтегрується в елементарних функціях. Рівняння при цьому має вигляд

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 0,25) y = 0. \quad (4.18)$$

Застосуємо заміну

$$y = \frac{z}{\sqrt{x}}.$$

Продиференціюємо двічі:

$$y' = \frac{z'}{\sqrt{x}} - \frac{z}{2\sqrt{x^3}},$$

$$y'' = \frac{z''}{\sqrt{x}} - \frac{z'}{\sqrt{x^3}} + \frac{3z}{4\sqrt{x^5}}.$$

Підставимо значення похідних у рівняння (4.18):

$$\sqrt{x^3} z'' - \sqrt{x} z' + \frac{3z}{4\sqrt{x}} + \sqrt{x} z' - \frac{z}{2\sqrt{x}} + \frac{z}{\sqrt{x^3}} - \frac{z}{4\sqrt{x}} = 0.$$

Після спрощення матимемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами

$$z'' + z = 0.$$

Фундаментальною системою цього рівняння є функції

$$z_1 = \cos x, \quad z_2 = \sin x.$$

Повертаючись до змінної y , одержуємо

$$y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}, \quad y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}},$$

тобто рівняння (4.18) має загальний розв'язок

$$y = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

У загальному випадку розв'язок рівняння Бесселя (4.17) шукатимемо у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y = x^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (4.19)$$

Диференціюючи (4.19) двічі почленно і підставляючи у (4.17), дістаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+m)^2 x^{k+m} + (x^2 - \eta^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m} = 0;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m} \left[(k+m)^2 + x^2 - \eta^2 \right] = 0.$$

Після скорочення на x^m матимемо

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k [(k+m)^2 + x^2 - \eta^2] = 0$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , дістанемо

[illegible]

Коефіцієнт a_0 вважатимемо відмінним від нуля. Тоді з першого рівняння дістанемо

$$m = \pm \eta.$$

Нехай $m = \eta \geq 0$. Тоді a_0 має довільне значення. З другого рівняння маємо $\left|(\eta + 1)^2 - \eta^2\right| a_1 = 0$, тобто $a_1 = 0$. З третього рівняння знаходимо

$$a_2 = -\frac{a_0}{(\eta + 2)^2 - \eta^2} = -\frac{a_0}{2^2(\eta + 1)}.$$

З четвертого рівняння $a_3 = 0$ і з п'ятого –

$$a_4 = -\frac{a_2}{(\eta + 4)^2 - \eta^2} = -\frac{a_0}{2^4(\eta + 1)(\eta + 2) \cdot 1 \cdot 2}.$$

Помічаємо, що всі коефіцієнти з непарними номерами дорівнюють нулю:

$$a_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Коефіцієнти парного індексу мають значення

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(\eta + 1)(\eta + 2) \dots (\eta + k) \cdot k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для спрощення вважатимемо, що

$$a_0 = \frac{1}{2^\eta \Gamma(\eta + 1)}, \quad (4.20)$$

де $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функція Ейлера.

Гамма-функція Ейлера $\Gamma(\alpha)$ визначена для всіх додатних значень α , а також для всіх комплексних значень з додатною дійсною частиною. Отже,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Гамма-функція має такі властивості:

1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$;
2. $\Gamma(1) = 1$;
3. $\Gamma(\alpha + k + 1) = (\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k) \Gamma(\alpha + 1)$, якщо k – ціле додатне число;
4. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$, якщо k – ціле додатне число.

Використовуючи (4.20) і властивості гамма-функції, маємо

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(\eta + 1)(\eta + 2) \dots (\eta + k) k! 2^\eta \Gamma(\eta + 1)} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\eta} k! \Gamma(\eta + k + 1)}.$$

Частинний розв'язок рівняння Бесселя, який позначимо через $J_\eta(x)$, матиме вигляд

$$J_\eta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\eta + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\eta}. \quad (4.21)$$

Функцію (4.21) називають *бессельовою функцією першого роду порядку η* .

При $m = -\eta$, де η – ціле, знаходимо

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(1 - \eta)(2 - \eta) \dots (k - \eta) \cdot k!}.$$

Для від'ємних α гамма-функція $\Gamma(\alpha)$ визначається інакше, але перша властивість зберігається. Отже, при $m = -\eta$, взявши сталу

$$a_0 = \frac{1}{2^{-\eta} \Gamma(1 - \eta)},$$

дістанемо

$$J_{-\eta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + 1 - \eta)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\eta}. \quad (4.22)$$

Цю функцію називають **бессельовою функцією першого роду порядку $-\eta$** , або **бессельовою функцією першого роду з від'ємним індексом**.

Неважко показати (використовуючи, наприклад, ознаку д'Аламбера), що ряд (4.21) рівномірно збіжний при всіх x , ряд (4.22) рівномірно збіжний при всіх $x \neq 0$. Ці ряди можна двічі почленно диференціювати. Отже, $J_{\eta}(x)$ і $J_{-\eta}(x)$ – розв'язки рівняння Бесселя (4.17).

Якщо η – не ціле число, то функції $J_{\eta}(x)$ і $J_{-\eta}(x)$ лінійно незалежні, оскільки їх ряди починаються з різних степенів змінної x . Тоді загальний розв'язок рівняння Бесселя (4.17) має вигляд

$$y(x) = C_1 J_{\eta}(x) + C_2 J_{-\eta}(x).$$

Слід зазначити, що при $\eta = n + \frac{1}{2}$, n – ціле, функція $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ записується

через елементарні функції.

Якщо η є ціле число, то функції $J_{\eta}(x)$ і $J_{-\eta}(x)$ лінійно залежні. Гамма-функція $\Gamma(\alpha)$ при від'ємних цілих α і $\alpha = 0$ перетворюється у нескінченність.

Отже, при цілому η замість $J_{-\eta}(x)$ треба шукати інший розв'язок, який був би лінійно незалежний від $J_{\eta}(x)$. Для цього введемо нову функцію

$$Y_{\eta}(x) = \frac{J_{\eta}(x) \cos \eta\pi - J_{-\eta}(x)}{\sin \eta\pi}, \quad (4.23)$$

вважаючи спочатку, що η – не ціле число. Визначена таким чином функція $Y_{\eta}(x)$ є розв'язком рівняння (4.17) як лінійна комбінація частинних розв'язків $J_{\eta}(x)$ і $J_{-\eta}(x)$.

Переходячи в (4.23) до границі при умові, що η прямує до цілого числа n , дістаємо частинний розв'язок $Y_n(x)$, лінійно незалежний від $J_{\eta}(x)$ і визначений для цілих значень η . Отже,

$$Y_n(x) = \lim_{\eta \rightarrow n} \frac{J_\eta(x) \cos \eta\pi - J_{-\eta}(x)}{\sin \eta\pi}. \quad (4.24)$$

Введену таким чином функцію (4.24) називають **бессельовою функцією другого роду порядку n** , або **функцією Вебера**. Загальний розв'язок рівняння (4.17) при натуральному $\eta = n$ має вигляд

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x),$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Зазначимо, що функція $Y_n(x)$ не обмежена в околі точки $x = 0$.

Наприклад,

$$\pi Y_0(x) = 2J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \xi \right) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \sum_{m=1}^k \frac{1}{m},$$

де ξ – стала Ейлера, $\xi = 0,577\dots$

Тому довільний розв'язок рівняння (4.17), обмежений в околі точки $x = 0$, має вигляд

$$y = C_1 J_n(x),$$

тобто при цьому $C_2 = 0$.

Зауваження 1. Рівняння

$$x^2 y'' + xy' + (k^2 x^2 - \eta^2) y = 0,$$

де k – деяка стала, $k \neq 0$, зводиться до рівняння Бесселя

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - \eta^2) y = 0$$

підстановкою $z = kx$.

Зауваження 2. Широкий клас рівнянь виду

$$x^2 y'' + axy' + (b + cx^m) y = 0, \quad (4.25)$$

де a, b, c, m – сталі, причому $c > 0, m \neq 0$, введенням нової змінної t і нової функції u

$$y = u \cdot \left(\frac{t}{\gamma} \right)^{-\frac{\alpha}{\beta}}, \quad x = \left(\frac{t}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

зводиться до рівняння Бесселя

$$t^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + t \frac{du}{dt} + (t^2 - \eta^2) u = 0.$$

Тут

$$\alpha = \frac{a-1}{2}, \quad \beta = \frac{m}{2}, \quad \gamma = \frac{2\sqrt{c}}{m}, \quad \eta^2 = \frac{(a-1)^2 - 4b}{m^2}.$$

При $c = 0$ або $m = 0$ рівняння (4.25) є рівнянням Ейлера.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{1}{9x^2}\right)y = 0$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0.$$

Це рівняння є рівнянням Бесселя. Оскільки $\eta = \frac{1}{3}$, то загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 J_{1/3}(x) + C_2 J_{-1/3}(x).$$

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $x^2 y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$, який задовольняє початкові умови $y(3) = 0$, $y'(3) = -1$.

Розв'язання. Покладемо $2x = t$. Тоді

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 4 \frac{d^2 y}{dt^2}$$

і рівняння перетворюється у рівняння Бесселя:

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0.$$

Звідси загальний розв'язок запишемо у вигляді

$$y = C_1 J_{1/2}(t) + C_2 J_{-1/2}(t) \text{ або } y = C_1 J_{1/2}(2x) + C_2 J_{-1/2}(2x).$$

Визначимо сталі C_1 і C_2 із початкових умов. Для цього скористаємося спочатку таблицею значень функцій Бесселя $J_{n/2}(x)$, матимемо

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

звідки $J_{1/2}(6) = -0.091$, $J_{-1/2}(6) = 0.313$, $J'_{1/2}(6) = 0.32$, $J'_{-1/2}(6) = 0.065$. Тоді $C_1 = -2.951$, $C_2 = -0.858$, отже остаточно дістанемо розв'язок задачі Коші у вигляді

$$y = -2.951 \cdot J_{1/2}(2x) - 0.858 \cdot J_{-1/2}(2x)$$

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який вигляд має рівняння Бесселя?
2. Яка функція називається бessel'овою функцією першого роду порядку η ?
3. Яку функцію називають бessel'овою функцією першого роду порядку $-\eta$, або бessel'овою функцією першого роду з від'ємним індексом?
4. Яка функція називається бessel'овою функцією другого роду порядку n , або функцією Вебера?

4.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищого порядку з сталими коефіцієнтами із спеціальною правою частиною

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (4.26)$$

де a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – задані дійсні числа, $f(x) \not\equiv 0$ – задана функція, неперервна на деякому проміжку (a, b) .

Згідно з теоремою 6 п. 3.5, загальний розв'язок рівняння (4.26) являє собою суму його частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння ми вже знаходимо вміємо, тому розглянемо детальніше питання про знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Насамперед слід зазначити, що частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (4.26) можна знайти в квадратурах методом варіації довільних сталих (п. 3.5). Проте для рівнянь з так званою спеціальною правою частиною частинний розв'язок можна знайти значно простіше, не вдаючись до операції інтегрування, наприклад, **методом невизначених коефіцієнтів**.

Розглянемо деякі з таких рівнянь.

1. Нехай права частина в рівнянні (4.26) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \quad (4.27)$$

де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен степеня n .

Можливі такі випадки.

➤ Число α не є коренем характеристичного рівняння

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0. \quad (4.28)$$

Тоді частинний розв'язок диференціального рівняння (4.26) шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{чн}} = e^{\alpha x} Q_n(x),$$

де $Q_n(x)$ – многочлен того же степеня, що і $P_n(x)$, але в загальному виді, коефіцієнти якого треба визначити, тобто

$$y_{\text{чн}} = e^{\alpha x} (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0), \quad (4.29)$$

де A_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) – невизначені коефіцієнти.

Справді, підставляючи функцію (4.29) у рівняння (4.26), скорочуючи на $e^{\alpha x}$ та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , дістанемо систему $n + 1$ лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення $n + 1$ невідомих коефіцієнтів A_i многочлена $Q_n(x)$.

➤ Число α збігається з одним коренем характеристичного рівняння (4.28), тобто є простим коренем цього рівняння. У цьому випадку частинний розв'язок рівняння (4.26) треба шукати у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x e^{\alpha x} Q_n(x).$$

➤ Число α є коренем кратності $r \leq n$, тоді частинний розв'язок рівняння (4.26) шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} Q_n(x). \quad (4.30)$$

Взагалі кажучи: якщо права частина рівняння (4.26) має вигляд (4.27), то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді (4.30), де $Q_n(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами того самого степеня, що й многочлен $P_n(x)$, а r – число коренів характеристичного рівняння (4.28), які дорівнюють α .

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + 9y = e^{3x}(54x^2 + 1)$.

Розв'язання. Шукатимемо загальний розв'язок у вигляді

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}},$$

де $y_{\text{зо}}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, $y_{\text{чн}}$ – частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння.

Оскільки права частина заданого рівняння належить до спеціального виду (4.27), а саме

$$\alpha = 3, \quad P_n(x) = 54x^2 + 1, \quad n = 2, \quad (4.31)$$

то частинний розв'язок будемо шукати методом невизначених коефіцієнтів у вигляді (4.30). Але спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Характеристичне рівняння $k^2 + 9 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm 3i$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння запишемо у вигляді

$$y_{\text{зо}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Тепер знайдемо $y_{\text{чн}}$ – частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння. Оскільки згідно з (4.31) $\alpha \neq k_{1,2}$, то $y_{\text{чн}}$ шукатимемо у вигляді (4.29), тобто

$$y_{\text{чн}} = e^{3x}(Ax^2 + Bx + C),$$

де A , B , C – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $(y_{\text{чн}})'$ та $(y_{\text{чн}})''$ і підставивши їх в дане рівняння, дістанемо після зведення подібних членів і скорочення на e^{3x} :

$$18Ax^2 + (18B + 12A)x + (18C + 6B + 2A) = 54x^2 + 1.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 18A = 54, \\ x^1 & 18B + 12A = 0, \\ x^0 & 18C + 6B + 2A = 1. \end{array}$$

Звідси

$$A = 3, \quad B = -2, \quad C = \frac{7}{18}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок даного рівняння

$$y_{\text{чн}} = e^{3x} \left(3x^2 - 2x + \frac{7}{18} \right).$$

Тоді загальним розв'язком буде функція

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + e^{3x} \left(3x^2 - 2x + \frac{7}{18} \right).$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$.

Розв'язання. Як і у попередньому прикладі спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$$

Складаємо характеристичне рівняння:

$$k^3 - 5k^2 + 8k - 4 = 0.$$

Його корені $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 2$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння запишемо у вигляді

$$y_{\text{зо}} = C_1 e^x + e^{2x} (C_2 + C_3 x).$$

Тепер перейдемо до визначення частинного розв'язку заданого неоднорідного рівняння. Оскільки права частина цього рівняння належить до спеціального виду (4.27), а саме $\alpha = 2$, $P_n(x) = 1$, $n = 0$, то частинний розв'язок шукатимемо у вигляді (4.30). Для даного прикладу $\alpha = 2$ є двократним коренем характеристичного рівняння, тому

$$y_{\text{чн}} = Ax^2 e^{2x}.$$

Підставивши останній вираз у задане рівняння, після деяких перетворень аналогічних попередньому прикладу, одержимо

$$A = \frac{1}{2},$$

отже,

$$y_{\text{чн}} = \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

Тоді остаточно запишемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}} = C_1 e^x + e^{2x} (C_2 + C_3 x) + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = 2x + 3$.

Розв'язання. Шукатимемо загальний розв'язок у вигляді

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}}.$$

Оскільки права частина заданого рівняння належить до спеціального виду (4.27), а саме

$$\alpha = 0, \quad P_n(x) = 2x + 3, \quad n = 1,$$

то частинний розв'язок будемо шукати методом невизначених коефіцієнтів у вигляді (4.30). Але спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння запишемо у вигляді

$$y_{\text{зо}} = e^x (C_1 + C_2 x).$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння. Оскільки $\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$, то за формулою (4.29) $y_{\text{чн}}$ шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{чн}} = Ax + B,$$

де A, B – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $(y_{\text{чн}})' = A$ та $(y_{\text{чн}})'' = 0$ і підставивши їх у рівняння, дістанемо

$$-2A + B + Ax = 2x + 3.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A = 2, \\ -2A + B = 3, \end{cases}$$

звідки $A = 2$, $B = 7$. Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y_{\text{чн}} = 2x + 7, \quad (4.32)$$

тому

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}} = e^x(C_1 + C_2x) + 2x + 7$$

є шуканий загальний розв'язок.

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 10y' + 25y = (2x - 1)e^{5x}$ при початкових умовах $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 10k + 25 = 0$, або $(k - 5)^2 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 5$.

Отже,

$$y_{\text{зо}} = e^{5x}(C_1 + C_2x).$$

Число $\alpha = 5$ є двократним коренем характеристичного рівняння. тоді частинний розв'язок знайдемо у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x^2 e^{5x}(Ax + B).$$

Підставляючи цей вираз у задане неоднорідне рівняння, після зведення подібних і скорочення на e^{5x} , матимемо

$$6Ax + 2B = 2x - 1.$$

Звідси

$$\begin{cases} 6A = 2, \\ 2B = -1; \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{2}.$$

Отже,

$$y_{\text{чн}} = x^2 e^{5x} \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2} \right).$$

Тоді

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}} = e^{5x}(C_1 + C_2x) + x^2 e^{5x} \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2} \right).$$

Визначимо тепер C_1 і C_2 , використовуючи задані початкові умови. Маємо

$$y(0) = C_1 = 1, \quad C_1 = 1,$$

$$y' = \left[\left(C_2 - x + x^2 \right) e^{5x} + \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right) 5e^{5x} \right] \Big|_{x=0} = C_2 + 5C_1, \quad C_2 = 6.$$

Отже,

$$y = \left(1 + x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 \right) e^{5x}$$

і є шуканим розв'язком, або розв'язком задачі Коші.

2. Нехай права частина в рівнянні (4.26) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x), \quad (4.33)$$

де $P_n(x)$ і $R_m(x)$ – многочлени степенів n і m відповідно, α та β – дійсні числа.

У цьому випадку частинний розв'язок рівняння (4.26)

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} (U_s(x) \cos \beta x + V_s(x) \sin \beta x), \quad (4.34)$$

де $U_s(x)$ та $V_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами; s – найвищий степінь многочленів $P_n(x)$ та $R_m(x)$, тобто $s = \max(n, m)$; r – число коренів характеристичного рівняння (4.28), які дорівнюють $\alpha \pm i\beta$.

Зокрема, якщо права частина рівняння (4.26) має вигляд

$$f(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x, \quad (4.35)$$

де A , B – відомі дійсні числа, то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x^r (a \cos \beta x + b \sin \beta x), \quad (4.36)$$

де a і b – невідомі коефіцієнти; r – число коренів характеристичного рівняння (4.28), які дорівнюють $i\beta$.

Слід зазначити, що функція (4.27) є окремим випадком функції (4.33) і утворюється з неї при $\beta = 0$.

Зауваження. Шуканий многочлен $Q_n(x)$ у формулі (4.30), має бути повним, тобто містити всі степені x від 0 до n , незалежно від того, чи є повним заданий многочлен $P_n(x)$. Те саме стосується многочленів $U_s(x)$ та $V_s(x)$ у формулі (4.34), причому невизначені коефіцієнти при одних і тих же степенях x у цих многочленах повинні бути, взагалі кажучи, різними.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + 4y' + 5y = e^{-x}(2 \cos x - x \sin x)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 5 = 0$ має корені $k_{1,2} = -2 \pm i$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння запишемо у вигляді

$$y_{30} = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Права частина даного рівняння $f(x) = e^{-x}(2 \cos x - x \sin x)$ є функцією виду (4.33), де $P_n(x) = 2$, $n = 0$, $R_m(x) = -x$, $m = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Крім того, число $\alpha \pm i\beta = -1 \pm i$ не збігається ні з одним із коренів характеристичного рівняння, тому згідно з формулою (4.34) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}} = e^{-x} [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x],$$

де A , B , C , D – невідомі коефіцієнти. Для їх визначення застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. Підставляючи $y_{\text{чн}}$, $(y_{\text{чн}})'$ та $(y_{\text{чн}})''$ у задане рівняння, після спрощень одержимо $[(A + 2C)x + 2A + B + 2C + 2D] \cos x + [(C - 2A)x - 2A - 2B + 2C + D] \sin x = 2 \cos x - x \sin x$.

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin x$ і $\cos x$ в лівій і правій частині цієї рівності, одержимо

$$\begin{cases} \cos x & | & (A + 2C)x + 2A + B + 2C + 2D = 2, \\ \sin x & | & (C - 2A)x - 2A - 2B + 2C + D = -x. \end{cases}$$

Тепер у кожній з останніх рівностей прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$\begin{cases} 2A + B + 2C + 2D = 2, \\ A + 2C = 0, \\ -2A - 2B + 2C + D = 0, \\ -2A + C = -1. \end{cases}$$

Звідси $A = \frac{2}{5}$, $B = -\frac{4}{25}$, $C = -\frac{1}{5}$, $D = \frac{22}{25}$. Тоді

$$y_{\text{чн}} = e^{-x} \left[\left(\frac{2}{5}x - \frac{4}{25} \right) \cos x + \left(-\frac{1}{5}x + \frac{22}{25} \right) \sin x \right]$$

Отже, загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}} = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x} \left[\left(\frac{2}{5}x - \frac{4}{25} \right) \cos x + \left(-\frac{1}{5}x + \frac{22}{25} \right) \sin x \right].$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + 4y = 5 \sin 2x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm 2i$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $y_{\text{зо}} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$.

Права частина даного рівняння $f(x) = 5 \sin 2x = 5 \sin 2x + 0 \cdot \cos 2x$ є функцією виду (4.35), де $A = 0$, $B = 5$, $\beta = 2$. Крім того, число $i\beta = 2i$ збігається з одним із коренів характеристичного рівняння, тому згідно з формулою (4.36) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x(a \cos 2x + b \sin 2x),$$

де a , b – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $(y_{\text{чн}})'$ та $(y_{\text{чн}})''$ і підставивши в дане рівняння, після спрощень дістанемо

$$-4a \sin 2x + 4b \cos 2x = 5 \sin 2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$ в лівій і правій частині цієї рівності, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4a = 5, \\ 4b = 0; \end{cases}$$

звідки $a = -\frac{5}{4}$, $b = 0$. Отже,

$$y_{\text{чн}} = -\frac{5}{4} x \cos 2x.$$

Тоді загальний розв'язок даного рівняння матиме вигляд

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{5}{4} x \cos 2x.$$

Приклад. Розв'язати задачу Коші:

$$y^{(4)} + y'' = 2 \cos x,$$

$$y(0) = -2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = y'''(0) = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$k^4 + k^2 = 0, \text{ або } k^2(k^2 + 1) = 0$$

має корені $k_{1,2} = 0$, $k_{3,4} = \pm i$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{зо}} = C_1 + xC_2 + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Права частина даного рівняння $f(x) = 2 \cos x = 0 \cdot \sin 2x + 2 \cos x$ є функцією виду (4.35), де $A = 2$, $B = 0$, $\beta = 1$. Крім того, число $i\beta = i$ збігається з одним із коренів характеристичного рівняння, тому згідно з формулою (4.36) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x(a \cos x + b \sin x),$$

де a , b – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $y'_{\text{чн}}$, $y''_{\text{чн}}$, $y'''_{\text{чн}}$ та $y^{(4)}_{\text{чн}}$ і підставивши в дане рівняння, після спрощень дістанемо

$$2a \sin x - 2b \cos x = 2 \cos x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin x$ і $\cos x$ в лівій і правій частині цієї рівності, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2a = 0, \\ -2b = 2; \end{cases}$$

звідки $a = 0$, $b = -1$. Отже,

$$y_{\text{чн}} = -x \sin x.$$

Тоді загальний розв'язок даного рівняння матиме вигляд

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}} = C_1 + xC_2 + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x \sin x.$$

Визначимо тепер C_1 , C_2 , C_3 , C_4 використовуючи задані початкові умови.

Обчислимо спочатку похідні $y'_{\text{зн}}$, $y''_{\text{зн}}$, $y'''_{\text{зн}}$:

$$y'_{\text{зн}} = C_2 - C_3 \sin x + C_4 \cos x - \sin x - x \cos x,$$

$$y''_{\text{зн}} = -C_3 \cos x - C_4 \sin x - 2 \cos x + x \sin x,$$

$$y'''_{\text{зн}} = C_3 \sin x - C_4 \cos x + 3 \sin x + x \cos x.$$

Тоді для визначення довільних сталих маємо систему

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = -2, \\ C_2 + C_4 = 1, \\ -C_3 - 2 = 0, \\ -C_4 = 0. \end{cases}$$

Звідси $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = -2$, $C_4 = 0$.

Отже,

$$y = x - 2 \cos x - x \sin x$$

і є шуканим розв'язком задачі Коші.

Зауваження. Якщо права частина рівняння (4.26) є сумою декількох різних за структурою функцій виду (4.27) або (4.32), то для відшукування частинного розв'язку треба використати теорему 7 п. 3.5 та властивість суперпозиції або накладання розв'язків.

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = 3e^x + 2x + 3$, який задовольняє початкові умови: $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{зо}} = e^x (C_1 + C_2 x).$$

Права частина заданого рівняння є сумою двох різних за структурою функцій

$$f_1(x) = 3e^x \text{ і } f_2(x) = 2x + 3,$$

тому за теоремою 7 п. 3.5 та властивістю накладання (суперпозиції) розв'язків частинний розв'язок даного рівняння дорівнює

$$y_{\text{чн}} = y_{1\text{чн}} + y_{2\text{чн}},$$

де $y_{1\text{чн}}$ та $y_{2\text{чн}}$ – частинні розв'язки рівнянь

$$y'' - 2y' + y = 3e^x \text{ та } y'' - 2y' + y = 2x + 3$$

відповідно.

Частинний розв'язок першого з цих рівнянь шукаємо у вигляді

$$y_{1\text{чн}} = x^2 A e^x,$$

оскільки $r = 2$ (число коренів характеристичного рівняння, які збігаються з $\alpha = 1$, дорівнює 2). Підставивши $y_{1\text{чн}}$, $(y_{1\text{чн}})'$ та $(y_{1\text{чн}})''$ в перше рівняння, після спрощень знайдемо

$$A = \frac{3}{2}, \text{ тому}$$

$$y_{1\text{чн}} = \frac{3}{2} x^2 e^x.$$

Частинний розв'язок другого рівняння шукаємо у вигляді $y_{2\text{чн}} = Ax + B$, звідки і з урахуванням (4.32), маємо

$$y_{2\text{чн}} = 2x + 7.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{1\text{чн}} + y_{2\text{чн}} = e^x \left(C_1 + C_2 x + \frac{3}{2} x^2 \right) + 2x + 7.$$

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє задані початкові умови (розв'язок задачі Коші). Продиференціюємо загальний розв'язок:

$$y'_{\text{зн}} = e^x \left(C_1 + C_2 + C_2 x + 3x + \frac{3}{2} x^2 \right) + 2.$$

Підставивши в загальний розв'язок і його похідну початкові умови $x = 0$, $y = 3$, $y' = -1$, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + 7 = 3, \\ C_1 + C_2 + 2 = -1; \end{cases}$$

звідки $C_1 = -4$, $C_2 = 1$. Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$y = e^x \left(\frac{3}{2} x^2 + x - 4 \right) + 2x + 7.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} + e^{3x} \cos 2x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$k^3 - 6k^2 + 9k = 0$$

має корені $k_1 = 0$ і $k_2 = k_3 = 3$. Виходячи з цього загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{зо}} = C_1 + e^{3x}(C_2 + C_3 x).$$

Права частина заданого рівняння складається з двох доданків: перший виду (4.27), другий – виду (4.33), тому за теоремою 7 п. 3.5 та властивістю накладання (суперпозиції) розв'язків частинний розв'язок даного рівняння дорівнює

$$y_{\text{чн}} = y1_{\text{чн}} + y2_{\text{чн}},$$

де $y1_{\text{чн}}$ та $y2_{\text{чн}}$ – частинні розв'язки рівнянь

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} \text{ та } y''' - 6y'' + 9y' = e^{3x} \cos 2x$$

відповідно.

Частинний розв'язок першого з цих рівнянь шукаємо у вигляді

$$y1_{\text{чн}} = x^2(Ax + B)e^{3x},$$

оскільки $r = 2$ (число коренів характеристичного рівняння, які збігаються з $\alpha = 3$, дорівнює 2). Підставивши $y1_{\text{чн}}$ в перше рівняння, після спрощень знайдемо $A = \frac{1}{18}$, $B = -\frac{1}{18}$, тому

$$y1_{\text{чн}} = x^2 \left(\frac{x}{18} - \frac{1}{18} \right) e^{3x}.$$

Частинний розв'язок другого рівняння шукаємо у вигляді $y2_{\text{чн}} = e^{3x}(C \cos 2x + D \sin 2x)$, оскільки число $\alpha + i\beta = 3 + 2i$ не є коренем характеристичного рівняння. Підставивши $y2_{\text{чн}}$ в задане рівняння, знайдемо $C = -\frac{3}{52}$, $D = -\frac{1}{26}$. Тоді маємо

$$y2_{\text{чн}} = -e^{3x} \left(\frac{3}{52} \cos 2x + \frac{1}{26} \sin 2x \right).$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y_{\text{зн}} = C_1 + e^{3x}(C_2 + C_3x) + x^2\left(\frac{x}{18} - \frac{1}{18}\right)e^{3x} - e^{3x}\left(\frac{3}{52}\cos 2x + \frac{1}{26}\sin 2x\right).$$

Зауваження. Викладений метод підбору частинного розв'язку рівняння (4.26) (метод невизначених коефіцієнтів) можна застосовувати лише для певних диференціальних рівнянь, а саме для лінійних рівнянь з сталими коефіцієнтами із спеціальною правою частиною виду (4.27) або (4.32). В інших випадках частинний розв'язок треба шукати методом варіації довільних сталих.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. Це рівняння не належить до лінійних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами із спеціальною правою частиною, оскільки його права частина $f(x) = \operatorname{tg} x$ не є функцією спеціального виду (4.27) або (4.32), тому розв'язок даного рівняння шукатимемо методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа). Але спочатку треба знайти фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння.

Характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm i$, тому фундаментальною системою розв'язків відповідного однорідного рівняння є функції

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = \cos x.$$

Згідно з методом Лагранжа будемо шукати загальний розв'язок даного рівняння у вигляді

$$y_{\text{зн}} = y_1 C_1(x) + y_2 C_2(x), \quad (4.37)$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ треба знайти з системи виду (3.29), а саме з системи

$$\begin{cases} C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = 0, \\ C_1'(x) \cos x - C_2'(x) \sin x = \operatorname{tg} x; \end{cases}$$

звідки

$$C_1'(x) = \sin x, \quad C_2'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Інтегруючи, дістанемо

$$C_1(x) = -\cos x + \tilde{C}_1;$$

$$C_2(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{dx}{\cos x} + \int \cos x dx = -\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \sin x + \tilde{C}_2,$$

де $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ – довільні сталі.

Підставляючи одержані функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ у (4.37) матимемо шуканий загальний розв'язок заданого рівняння

$$y_{\text{зн}} = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

При $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0$ з формули (4.) дістанемо частинний розв'язок

$$y_{\text{чн}} = -\sin x \cos x + \left(\sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) \cos x.$$

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. До яких диференціальних рівнянь застосовується метод невизначених коефіцієнтів, щоб знайти частинний розв'язок?

2. У якому вигляді відшукують частинний розв'язок диференціального рівняння у випадку коли права частина має вигляд $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$?

3. У якому вигляді відшукують частинний розв'язок диференціального рівняння, якщо права частина має вигляд $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x)$?

4. Розв'язати рівняння:

а) $y'' - 2y' + y = e^x$, відповідь: $y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} x^2 \right) e^x$;

б) $y'' + 4y = x \sin 2x$,

відповідь: $y = \left(C_1 - \frac{x^2}{8} \right) \cos 2x + \left(C_2 + \frac{x}{16} \right) \sin 2x$;

в) $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$,

відповідь: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - e^{-x} - \frac{x}{2} \cos x$;

г) $y''' + y'' = e^{-x}$, відповідь: $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + x) e^{-x}$;

д) $y''' - 3y' + 2y = (18x + 12)e^x + 9e^{-x}$,

відповідь: $y = (C_1 + C_2 x + x^2(x + 1))e^x + C_3 e^{-2x} + \frac{9}{4} e^{-x}$;

е) $y^{(4)} + y'' = x^2 + x$,

відповідь: $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12}$;

ж) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$,

відповідь: $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x} - (2x^2 - 2x + 3)e^{2x}$;

з) $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$,

відповідь: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (0.1x - 0.12) \cos x - (0.3x + 0.34) \sin x$;

і) $y'' + y = 4x e^x$,

відповідь: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (2x - 2)e^x$,

к) $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$,

відповідь: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{3x} \left(\frac{6}{37} \sin x - \frac{1}{37} \cos x \right)$.

5. Знайти частинні розв'язки рівнянь, які задовольняють задані початкові умови:

а) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 9$,

відповідь: $y = \frac{1}{8}(e^x + 22e^{3x} + e^{5x})$;

б) $y''' - y' = -3x^2 + 6$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$,

відповідь: $y = e^x + x^3$;

в) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$

відповідь: $y = e^{-x}(x - \sin x)$.

6. Розв'язати рівняння методом варіації довільних сталих:

а) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$, відповідь: $y = e^x(x \ln|x| + C_1x + C_2)$;

б) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$, відповідь: $y = (C_1 + \ln|\sin x|)\sin x + (C_2 - x)\cos x$.

$$\text{б) } y''' - y' = -3x^2 + 6, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1,$$

$$\text{відповідь: } y = e^x + x^3;$$

$$\text{в) } y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$\text{відповідь: } y = e^{-x}(x - \sin x).$$

5. Розв'язати рівняння методом варіації довільних сталих:

$$\text{а) } y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, \quad \text{відповідь: } y = e^x(x \ln|x| + C_1x + C_2);$$

$$\text{б) } y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \quad \text{відповідь: } y = (C_1 + \ln|\sin x|)\sin x + (C_2 - x)\cos x.$$

4.4. Крайові задачі

На відміну від задачі Коші для звичайного диференціального рівняння в крайовій задачі значення шуканої функції (або значення лінійної комбінації функції та її похідної) задається не в одній, а в двох точках, що обмежують відрізок, на якому треба знайти розв'язок.

Надалі ми будемо розглядати крайові задачі для лінійного рівняння другого порядку

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (4.38)$$

з умовами

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1, \quad (4.39)$$

де a та b початкова і кінцева точки відрізка на якому відшукується розв'язок рівняння (4.38); y_0 та y_1 – деякі задані сталі.

Співвідношення (4.38) і (4.39) називають *крайовою задачею* для лінійного диференціального рівняння другого порядку.

Крайові умови (4.39) називають *однорідними*, якщо y_0 і y_1 дорівнюють нулю, у противному випадку *неоднорідними*.

Крайову задачу (4.38), (4.39) називають *однорідною*, якщо і диференціальне рівняння і крайові умови однорідні; у будь-якому іншому випадку її називають *неоднорідною*; іноді *напіводнорідною*, якщо $y_0 = y_1 = 0$, але $f(x) \neq 0$.

Функція $y(x) \equiv 0$ є розв'язком будь-якої однорідної крайової задачі; цей розв'язок називають *тривіальним*. Нетривіальними називають лише ті розв'язки однорідної крайової задачі, які не дорівнюють нулю.

Далі ми будемо приділяти більш уваги крайовим задачам з однорідними крайовими умовами виду

$$\begin{cases} \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \end{cases} \quad (4.40)$$

Щоб розв'язати крайову задачу (4.38), (4.40) необхідно знайти загальний розв'язок рівняння (4.38) і підібрати значення довільних сталих так, щоб були виконані крайові умови (4.40).

Слід зазначити, що на відміну від задачі Коші крайова задача не завжди може мати розв'язок навіть для лінійного рівняння, тобто не завжди існує такий розв'язок, який набуває на кінцях відрізка задані значення, а якщо вона й має розв'язок, то часто не єдиний.

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $y'' - y' = 0$, який задовольняє крайові умови

$$y(0) = 3, \quad y(1) - y'(1) = 1.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - k = 0$, має корені $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, тому загальний розв'язок даного рівняння запишемо у вигляді

$$y = C_1 + C_2 e^x.$$

З крайових умов матимемо наступну систему для визначення сталих C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 + C_2 e - C_2 e = 1. \end{cases}$$

Звідси $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Таким чином, розв'язком крайової задачі є функція

$$y = 1 + 2e^x.$$

Функція Гріна. До розв'язування крайової задачі є різні підходи. Один з них – це застосування функції Гріна.

Означення. Функцією Гріна крайової задачі (4.38), (4.40) називають функцію $G(x, s)$, яка визначена при $x \in [a, b]$, $s \in [a, b]$ і при кожному фіксованому $s \in [a, b]$ має такі властивості:

1) при $x \neq s$ функція $G(x, s)$ задовольняє рівняння

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0; \quad (4.41)$$

2) при $x = a$ і $x = b$ функція $G(x, s)$ задовольняє крайові умови (4.40);

3) при $x = s$ функція $G(x, s)$ неперервна по x , а її похідна по x має розрив першого роду із скачком, що дорівнює $\frac{1}{a_0(x)}$, тобто

$$\begin{cases} G(s+0, s) = G(s-0, s), \\ G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, s) = \frac{1}{a_0(s)}. \end{cases} \quad (4.42)$$

Щоб знайти функцію Гріна крайової задачі (4.38), (4.40), треба знайти два розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ (відмінні від $y(x) \equiv 0$) рівняння (4.41), що задовольняють відповідно першу і другу з крайових умов (4.40).

Якщо $y_1(x)$ не задовольняє одночасно обом крайовим умовам, то функція Гріна $G(x, s)$ існує і її можна знайти у вигляді

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)y_1(x) & \text{при } a \leq x \leq s, \\ \psi(s)y_2(x) & \text{при } s \leq x \leq b, \end{cases} \quad (4.43)$$

де функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ підбираємо так, щоб функція (4.43) задовольняла умовам (4.42), тобто щоб

$$\begin{aligned} \psi(s)y_2(s) &= \varphi(s)y_1(s), \\ \psi(s)y_2'(s) - \varphi(s)y_1'(s) &= \frac{1}{a_0(s)}. \end{aligned}$$

Якщо знайдено функцію Гріна $G(x, s)$, то розв'язок крайової задачі виражається формулою

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds. \quad (4.44)$$

Приклад. За допомогою функції Гріна розв'язати крайову задачу

$$\begin{aligned} y'' &= f(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \\ y(-1) &= y(1) = 0. \end{aligned}$$

Розв'язання. Загальним розв'язком однорідного рівняння $y'' = 0$ є функція $y = C_1 + C_2x$.

Обидві умови не задовольняються, але першу крайову умову буде задовольняти будь-яка функція для якої $y(-1) = C_1 - C_2 = 0$, отже $C_1 = C_2$, тобто, наприклад, функція $y_1(x) = 1 + x$.

Другу крайову умову буде задовольняти будь-яка функція для якої $y(1) = C_1 + C_2 = 0$, отже $C_1 = -C_2$, тобто, наприклад, функція $y_2(x) = 1 - x$.

Функцію Гріна для заданої крайової задачі шукаємо у вигляді

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)(1 + x), & -1 \leq x \leq s, \\ \psi(s)(1 - x), & s \leq x \leq 1, \end{cases}$$

де функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначаються з умов

$$\psi(s)(1 - x) = \varphi(s)(1 + x), \quad -\psi(s) - \varphi(s) = 1.$$

Звідси

$$\varphi(s) = -\frac{1-s}{2}, \quad \psi(s) = -\frac{1+s}{2}.$$

Таким чином, шуканою функцією Гріна є

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1-s)(1+x), & -1 \leq x \leq s, \\ -\frac{1}{2}(1+s)(1-x), & s \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Тепер згідно з (4.44) запишемо розв'язок крайової задачі

$$y = \int_{-1}^1 G(x, s) f(s) ds = -\frac{1+x}{2} \int_{-1}^x (1-s) f(s) ds - \frac{1-x}{2} \int_x^1 (1+s) f(s) ds.$$

Метод зведення крайових задач до задач Коші. При розв'язуванні лінійних крайових задач часто буває корисним такий прийом. Якщо задано лінійне диференціальне рівняння (4.38) з двома крайовими умовами щодо $y(x)$ та її похідних в двох точках $x = a$ і $x = b$, то маємо такий розв'язок крайової задачі:

$$y(x) = y_0(x) + \alpha u(x) + \beta v(x), \quad (4.45)$$

де функції $y_0(x)$, $u(x)$ і $v(x)$ знаходять відповідно з трьох задач Коші:

$$\begin{aligned} L[y] &= f(x), & y(a) &= y'(a) = 0; \\ L[y] &= 0, & y(a) &= 1, \quad y'(a) = 0; \\ L[y] &= 0, & y(a) &= 0, \quad y'(a) = 1. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Підставляючи задані крайові умови у вираз (4.45), дістанемо систему двох рівнянь для визначення коефіцієнтів α і β .

Приклад. Розв'язати крайову задачу $xy'' - y' = \frac{3}{x^2}$, $y(1) - y'(1) = 0$, $3y(2) - 2y'(2) = 3$.

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок даної крайової задачі у вигляді

$$y(x) = y_0(x) + \alpha u(x) + \beta v(x)$$

де функції $y_0(x)$, $u(x)$ і $v(x)$ згідно з (4.46) знаходять відповідно з трьох задач Коші:

$$\begin{aligned} xy'' - y' &= \frac{3}{x^2}, & y(1) &= y'(1) = 0; \\ xy'' - y' &= 0, & y(1) &= 1, \quad y'(1) = 0; \\ xy'' - y' &= 0, & y(1) &= 0, \quad y'(1) = 1. \end{aligned}$$

Обидва рівняння є рівняннями одного типу – диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку, які не містять явно невідомої функції y . Розв'язуючи їх відповідним методом з урахуванням початкових умов матимемо

$$y_0(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x}, \quad u(x) = 1, \quad v(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

Таким чином

$$y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x} + \alpha + \frac{\beta}{2}(x^2 - 1).$$

Підберемо α і β так, щоб останній вираз задовольняв крайові умови, тобто визначимо α і β із системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0, \\ 6\alpha + \beta = 7. \end{cases}$$

Звідси $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1) = x^2 + \frac{1}{x} - 1.$$

Крім зазначених вище методів розв'язування крайових задач, розглянемо ще і такі методи, як метод „стрільби” та метод „прогонки” (факторизації).

Розглянемо таку крайову задачу:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad (4.47)$$

де $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – функції, визначені і неперервні на відрізку $[a, b]$:

$$y'(a) - \alpha_0 y(a) = \alpha_1, \quad y'(b) - \beta_0 y(b) = \beta_1, \quad (4.48)$$

α_0 , α_1 , β_0 , β_1 – сталі.

Нехай крайова задача (4.47), (4.48) має єдиний розв'язок. Застосуємо для її розв'язування метод „стрільби”.

Метод „стрільби”. Нехай $y_0(x)$ – частинний розв'язок рівняння (4.47), що задовольняє початкові умови

$$y_0(a) = \alpha, \quad y'_0(a) = \alpha_0 y_0(a) + \alpha_1$$

де α – довільно вибране число.

Тоді при довільному C функція

$$y(x) = y_0(x) + C z_0(x) \quad (4.49)$$

є розв'язком рівняння (4.47), який задовольняє першу з крайових умов (4.48).

У співвідношенні (4.49) $z_0(x)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$z'' + a_1(x)z' + a_2(x)z = 0,$$

яке задовольняє початкові умови

$$z_0(a) = \gamma, \quad z'_0(a) = \alpha_0 z_0(a),$$

де γ – довільно вибране число.

Сталу C у (4.49) підберемо так, щоб здобутий розв'язок задовольняв і другу крайову умову:

$$y'_0(b) + C z'_0(b) - \beta_0 [y_0(b) + C z_0(b)] = \beta_1.$$

Звідси

$$C = \frac{\beta_1 - y'_0(b) + \beta_0 y_0(b)}{z'_0(b) - \beta_0 z_0(b)}.$$

Помітимо, що $z'_0(b) - \beta_0 z_0(b) \neq 0$, оскільки в противному разі крайова задача (4.47), (4.48) або не має розв'язків, або має їх нескінченну множину.

Отже, метод „стрільби” полягає в тому, щоб з однопараметричної сім'ї розв'язків, які задовольняють першу крайову умову, відібрати той розв'язок, що задовольняє другу крайову умову.

Розглянемо тепер метод „прогонки” для розв'язування крайової задачі (4.47), (4.48).

Метод „прогонки” (факторизації). Запишемо рівняння (4.47) так:

$$\left(\frac{d}{dx} + \mu(x) \right) \left(\frac{d}{dx} + \nu(x) \right) y = f(x).$$

Тут функції $\mu(x)$ і $\nu(x)$ треба підібрати так, щоб

$y'' + [\mu(x) + v(x)]y' + [v'(x) + \mu(x)v(x)]y \equiv y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$,
тобто функції $\mu(x)$ і $v(x)$ повинні задовольняти рівняння

$$\begin{cases} \mu(x) + v(x) = a_1(x), \\ v'(x) + \mu(x)v(x) = a_2(x). \end{cases}$$

Звідси дістаємо

$$\begin{cases} \mu(x) = a_1(x) - v(x), \\ v'(x) + a_1(x)v(x) - v^2(x) = a_2(x). \end{cases}$$

Покладемо $v(a) = -\alpha_0$, тоді для знаходження $v(x)$ маємо таку задачу Коші:

$$v'(x) + a_1(x)v(x) - v^2(x) = a_2(x), \quad v(a) = -\alpha_0.$$

Позначимо $y' + v(x)y = z(x)$, тоді згідно з першою граничною умовою з (4.48)

$$z(a) = y'(a) + v(a)y(a) = y'(a) - \alpha_0 y(a) = \alpha_1.$$

Щоб знайти $z(x)$, складемо таку задачу Коші:

$$z' + [a_1(x) - v(x)]z = f(x), \quad z(a) = \alpha_1. \quad (4.50)$$

Для знаходження $y(x)$ треба розв'язати задачу Коші

$$y' + v(x)y = z(x), \quad y(b) = y_1, \quad (4.51)$$

причому $y(b) = y_1$ знаходиться з рівнянь

$$y'(b) - \beta_0 y(b) = \beta_1, \quad y'(b) + v(b)y(b) = z(b).$$

Розв'язуючи послідовно ці задачі Коші, дістанемо розв'язок $y(x)$ крайової задачі (4.47), (4.48).

Розв'язок задачі Коші (4.50) називають *прямою прогонкою*, а задачі Коші (4.51) – *зворотною прогонкою*.

Зазначимо, що крайову задачу попередніми перетвореннями можна звести до так званою задачі стандартного типу.

Наприклад, нехай маємо крайову задачу для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_1) = y_1.$$

Тоді лінійною заміною

$$z = y - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) y_0$$

крайові умови зводяться до нульових умов

$$z(x_0) = z(x_1) = 0, \quad (4.52)$$

причому лінійність рівняння не порушується.

Множенням на $e^{\int a_1(x) dx}$ задане лінійне рівняння зводиться до вигляду

$$\frac{d}{dx}[a(x)y'] + q(x)y = f(x), \quad (4.53)$$

де $a(x) = e^{\int a_1(x) dx}$. Тому звичайно розглядають крайову задачу типу (4.53), (4.52).

Власні значення і власні функції. Власним значенням крайової задачі

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \lambda y, \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$$

називають таке число $\lambda = \lambda_0$, при якому ця задача має нетривіальний $y = \varphi(x)$. Цей розв'язок називають *власною функцією*, яка визначається з точністю до довільного сталого множника.

Приклад. Знайти власні значення і власні функції крайової задачі $y'' = \lambda y$, $y(0) = y(l) = 0$, $l > 0$.

Розв'язання. Якщо $\lambda = 0$, то розв'язком заданого рівняння є функція $y = C_1x + C_2$ і крайові умови задовольняє лише тривіальний розв'язок, тобто $\lambda = 0$ не є власним значенням. Нехай $\lambda > 0$; тоді загальним розв'язком заданого рівняння буде функція

$$y = C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}.$$

Серед цих функцій крайові умови задовольняє тільки $y \equiv 0$.

Якщо $\lambda < 0$, то розв'язок рівняння $y'' = \lambda y$ має вигляд

$$y = C_1 \sin \sqrt{-\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{-\lambda} x.$$

Підставляючи останній вираз у крайові умови, одержимо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \sin(\sqrt{-\lambda} l) = 0.$$

Отже, дана крайова задача має ненульові розв'язки, якщо $\sqrt{-\lambda} l = k\pi$, тобто

$$\lambda = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ці значення λ є власними. Відповідні цим значенням власні функції такі:

$$y_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як формулюється крайова задача для диференціального рівняння другого порядку? Скільки розв'язків вона має?
2. Що таке функція Гріна крайової задачі? Які властивості вона має?
3. Якими методами можна розв'язати крайову задачу?
4. Чи можна розв'язати неоднорідну крайову задачу за допомогою функції Гріна, якщо відповідна однорідна задача має розв'язки, що не дорівнюють нулю?
5. Що таке власні значення і власні функції крайової задачі?
6. Розв'язати крайові задачі:

а) $y'' - y = 2x$, $y(0) = 0$, $y(1) = -1$, відповідь: $y = \frac{shx}{sh1} - 2x$;

б) $y'' - y' = 0$, $y(0) = -1$, $y'(1) - y(1) = 2$, відповідь: $y = e^x - 2$;

в) $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

відповідь: $y = 1 - \sin x - \cos x$.

7. Для кожної з крайових задач побудувати функцію Гріна:

а) $y'' - y = f(x)$, $y'(0) = 0$, $y'(2) + y(2) = 0$,

відповідь: $G(x, s) = \begin{cases} -e^{-s}chx, & 0 \leq x \leq s, \\ -e^{-x}chs, & s \leq x \leq 2; \end{cases}$

б) $x^2 y'' + 2xy' = f(x)$, $y(1) = 0$, $y'(3) = 0$,

відповідь: $G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & 1 \leq x \leq s, \\ \frac{1}{s} - 1, & s \leq x \leq 3; \end{cases}$

в) $y'' + y = f(x)$, $y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$,

відповідь: $G(x, s) = \begin{cases} \sin s \cos x, & 0 \leq x \leq s, \\ \cos s \sin x, & s \leq x \leq \pi. \end{cases}$

8. Знайти власні значення і власні функції:

а) $y'' = \lambda y$, $y'(0) = y'(l) = 0$,

відповідь: $\lambda_k = -\frac{k^2 \pi^2}{l^2}$, $y_k = \cos \frac{k\pi x}{l}$, $k = 0, 1, 2, \dots$;

б) $y'' = \lambda y$, $y(0) = 0$, $y'(l) = 0$,

відповідь: $\lambda_k = -\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}$, $y_k = \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

РОЗДІЛ 5

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

5.1. Нормальна система диференціальних рівнянь. Існування і єдиність розв'язку задачі Коші

В найзагальнішому вигляді система звичайних диференціальних рівнянь – це сукупність співвідношень, які виражають залежність між аргументом, шуканими функціями цього аргументу та їх похідними. З самого початку будемо вважати, що кількість невідомих функцій співпадає з кількістю рівнянь. Отже, система звичайних диференціальних рівнянь має вигляд

$$F_i(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2)}, \dots, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k)}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (5.1)$$

Серед усіх систем виду (5.1) найбільш вивченими є системи рівнянь, які можна розв'язати відносно старших похідних, тобто системи виду

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} = f_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k-1)}), \\ y_2^{(m_2)} = f_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k-1)}), \\ \dots, \\ y_k^{(m_k)} = f_k(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k-1)}). \end{cases} \quad (5.2)$$

Систему диференціальних рівнянь (5.2) називають *канонічною*.

Кожну канонічну систему з k рівнянь виду (5.2) можна перетворити в систему з $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ диференціальних рівнянь, що містять в лівих частинах похідні тільки першого порядку, а праві частини цих рівнянь зовсім не містять похідних. Для цього досить кожен похідну невідомих функцій, за винятком старших, замінити новими невідомими функціями. Розглянемо це на прикладі.

Нехай треба зробити зазначене перетворення для системи рівнянь

$$\begin{cases} y_1^{(4)} = f_1(x, y_1, y_1', y_1'', y_1''', y_2, y_2', y_3, y_3', y_3''), \\ y_2'' = f_2(x, y_1, y_1', y_1'', y_1''', y_2, y_2', y_3, y_3', y_3''), \\ y_3''' = f_3(x, y_1, y_1', y_1'', y_1''', y_2, y_2', y_3, y_3', y_3''). \end{cases} \quad (5.3)$$

Введемо заміну

де $y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9$ – нові невідомі функції.

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_1 = y_4, \\ y'_2 = y_7, \\ y'_3 = y_8, \\ y'_4 = y_5, \\ y'_5 = y_6, \\ y'_6 = f_1(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9), \\ y'_7 = f_2(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9), \\ y'_8 = y_9, \\ y'_9 = f_3(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9). \end{array} \right.$$

Отже, у загальному випадку, замість системи (5.2) будемо розглядати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \quad (5.4)$$

Розв'язком системи (5.4) називають довільну впорядковану сукупність функцій

що перетворює кожне рівняння системи (5.4) у тотожність.

Для системи (5.4) *задача Коші* формулюється так: знайти невідомі функції (5.5), що задовольняють систему рівнянь (5.4) і задані початкові умови

Для системи (5.4) виконується теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші.

Теорема існування і єдиності задачі Коші. Якщо праві частини системи (5.4) в замкненій області

де a і b – деякі додатні числа, задовольняють умови:

1) всі функції $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) неперервні і обмежені в області D , отже $|f_i| \leq M$;

2) всі функції $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) задовольняють умову Ліпшиця

$$|f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) - f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq N \sum_{k=1}^n |\bar{y}_k - y_k|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

де N – стала Ліпшиця, то існує єдиний розв'язок задачі (5.4), (5.6) визначений і неперервний на відрізку $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, де $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

Зауваження. Умова Ліпшиця виконується завжди, коли функції f_i мають в області D обмежені частинні похідні по y_k , тобто коли

$$\left| \frac{\partial}{\partial y_k} f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \right| \leq L, \quad i, k = \overline{1, n}.$$

Загальний розв'язок нормальної системи диференціальних рівнянь. На підставі теореми про існування і єдиність розв'язку задачі Коші (5.4), (5.6) наведемо означення загального розв'язку нормальної системи диференціальних рівнянь та інші поняття.

Означення. Систему n функцій

$$y_i = y_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.7)$$

що залежить від x та n довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ називають загальним розв'язком нормальної системи (5.4) в деякій області D існування та єдиності розв'язку задачі Коші, якщо:

1) при будь-яких припустимих значеннях $C_1, C_2, \dots, C_n$ система функцій (5.7) перетворює рівняння (5.4) в тотожність;

2) в області D функції (5.7) розв'язують будь-яку задачу Коші.

Розв'язок, що дістаємо з загального при конкретних значеннях сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ називають частинним розв'язком.

Якщо розглядати $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ як прямокутні декартові координати $(n+1)$ - вимірною простору, то частинний розв'язок системи (5.4), що задовольняє початкові умови (5.6), визначає в просторі деяку лінію, яка проходить через точку $(x_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n})$. Цю лінію називають інтегральною кривою нормальної системи (5.4). Таким чином з геометричної точки зору задача Коші являє собою задачу про знаходження інтегральної кривої системи (5.4), яка проходить через точку, що визначається початковими умовами (5.6).

Механічний зміст нормальної системи. Можна дати ще одну інтерпретацію системи диференціальних рівнянь (5.4), особливо важливу у механіці. Позначимо незалежну змінну через t і будемо розглядати її як час. Невідомі функції позначимо через $x_1, x_2, \dots, x_n$, причому систему значень цих змінних будемо розглядати як координати точки фазового простору.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (5.8)$$

Задача знаходження розв'язку системи (5.8) полягає у визначенні функцій

що задовольняють систему (5.8) і в початковий момент часу $t = t_0$ приймають значення

З погляду механіки це означає: знайти функції

які для кожного моменту часу t визначають положення рухомої точки, яка у початковий момент t_0 займала початкове положення $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$.

Найбільший інтерес представляє окремий випадок системи (5.8), коли праві частини не залежать явно від t :

[illegible]

Система (5.10) називається *автономною системою* і визначає *стаціонарний рух* середовища; швидкість у кожній точці простору не залежить від часу t , отже, є постійною в цій точці протягом усього часу.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку систему диференціальних рівнянь називають канонічною?
2. Яка система диференціальних рівнянь зветься нормальною? Що таке розв'язок цієї системи?
3. В чому полягає задача Коші для нормальної системи? Яке її геометричне та механічне тлумачення?
4. Теорема існування і єдиності задачі Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь?
5. Що називається загальним розв'язком нормальної системи диференціальних рівнянь?
6. Яка система диференціальних рівнянь називається динамічною системою? Що таке автономна система?

5.2. Інтегрування нормальної система диференціальних рівнянь методом виключення невідомих функцій

Окремим випадком системи (5.2) можна вважати одне диференціальне рівняння порядку n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (5.11)$$

інтегрування якого вже було розглянуто вище і яке зводиться до нормальної системи диференціальних рівнянь (5.4), згаданим у попередньому параграфі способом.

Взагалі кажучи, нормальна система n диференціальних рівнянь першого порядку за допомогою метода виключення невідомих функцій може бути зведена до одного рівняння n -го порядку (5.11) з однією невідомою функцією.

Отже, нехай маємо нормальну систему (5.4). Диференціюючи перше рівняння по x

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx}$$

та замінюючи похідні $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ їх виразами $f_1, f_2, \dots, f_n$ з інших рівнянь системи (5.4) дістаємо

ТОБТО ВИРАЗ

права частина якого є відомою функцією своїх аргументів.

Диференціюючи це рівняння і виконуючи ту саму процедуру, що й раніше, знаходимо

Продовжуючи далі, дістанемо, нарешті рівняння

Отже, матимемо таку систему:

Якщо яacobian

не дорівнює нулю, то з перших $(n - 1)$ рівнянь системи (5.13) знайдемо $y_2, y_3, \dots, y_n$, виразивши їх через $x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$:

Підставляючи ці вирази в останнє рівняння системи (5.13), дістанемо рівняння n -го порядку для визначення y_1 :

Звідси, інтегруючи, знайдемо y_1 :

165

Диференціюючи цю функцію $(n - 1)$ раз, знайдемо похідні $y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$ як функції від $x, C_1, \dots, C_n$. Підставляючи ці функції у вирази (5.14) для $y_2, y_3, \dots, y_n$ дістанемо невідомі функції:

$$\begin{aligned} y_2 &= \Psi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n); \\ y_3 &= \Psi_3(x, C_1, C_2, \dots, C_n); \\ &\dots\dots\dots; \\ y_n &= \Psi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned}$$

Таким чином, з самого способу одержання рівняння (5.15) виходить, що коли $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ є розв'язки системи (5.4), то $y_1(x)$ задовольняє рівняння (5.15). Навпаки, якщо маємо розв'язок $y_1(x)$ рівняння (5.15), то за формулами (5.14) зможемо визначити $y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$. Залишається довести, що ці функції задовольняють систему (5.4).

При наших припущеннях функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ перетворюють на тотожності перші $(n - 1)$ рівняння системи (5.13), зокрема маємо тотожність

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (5.16)$$

Диференціюючи цю тотожність по x , дістанемо

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx}, \quad (5.17)$$

та на підставі (5.12) маємо

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n. \quad (5.18)$$

Віднімаючи (5.18) від (5.17), знаходимо

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \left(\frac{dy_1}{dx} - f_1 \right) + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \left(\frac{dy_2}{dx} - f_2 \right) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \left(\frac{dy_n}{dx} - f_n \right) = 0. \quad (5.19)$$

Продовжуючи цей процес, далі матимемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \left(\frac{dy_1}{dx} - f_1 \right) + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \left(\frac{dy_2}{dx} - f_2 \right) + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \left(\frac{dy_n}{dx} - f_n \right) = 0, \\ \dots\dots\dots, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} \left(\frac{dy_1}{dx} - f_1 \right) + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2} \left(\frac{dy_2}{dx} - f_2 \right) + \dots + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \left(\frac{dy_n}{dx} - f_n \right) = 0.$$

Враховуючи, що завдяки тотожності (5.16) перші члени всіх рівностей (5.19), (5.20) зникають, і розглядаючи решту одержаних рівностей як систему $(n - 1)$

рівнянь з $(n - 1)$ невідомими $\frac{dy_i}{dx} = f_i$ ($i = 2, 3, \dots, n$), робимо висновок, оскільки за умовою визначник системи не дорівнює нулю, то мають місце тотожності

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2, \frac{dy_3}{dx} = f_3, \dots, \frac{dy_n}{dx} = f_n,$$

тобто $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ справді є розв'язком системи (5.4). *Що і треба було довести.*

Отже, при зроблених припущеннях інтегрування одного рівняння n -го порядку (5.11) дає змогу знайти розв'язок нормальної системи рівнянь (5.4). Такий метод інтегрування системи зветься *методом виключення*.

Приклад. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z, \\ \frac{dz}{dx} = y + z + x. \end{cases}$$

Розв'язання. Застосуємо метод виключення невідомих функцій. Диференціюємо перше рівняння системи по x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}.$$

Підставляючи $\frac{dz}{dx}$ із другого рівняння, одержимо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + y + z + x.$$

В останнє співвідношення підставляємо z із першого рівняння системи, матимемо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + y + x + \frac{dy}{dx} - y,$$

тобто

$$y'' - 2y' = x.$$

Маємо одне диференціальне рівняння другого порядку відносно однієї невідомої функції $y(x)$, яке не містить явно невідомої функції і допускає зниження порядку, тобто вводимо заміну $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$. Тоді прийдемо до лінійного рівняння відносно функції $p(x)$

$$p' - 2p = x.$$

Розв'язуючи його одним із відомих методів, дістанемо загальний розв'язок у вигляді

$$p = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + C_1 e^{2x}.$$

Тоді

$$y = -\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} C_1 e^{2x} + C_2.$$

Оскільки з першого рівняння заданої системи $z = y' - y$, матимемо

$$z = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} C_1 e^{2x} - C_2.$$

Отже, загальний розв'язок даної системи остаточно має вигляд

$$\begin{cases} y = -\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} C_1 e^{2x} + C_2, \\ z = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} C_1 e^{2x} - C_2. \end{cases}$$

Зауваження. Від рівняння n -го порядку завжди можна перейти до еквівалентної системи першого порядку, а навпаки, не завжди виконується еквівалентність.

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому полягає метод виключення невідомих при інтегруванні нормальної системи диференціальних рівнянь?

2. У якому випадку нормальну систему диференціальних рівнянь не можна звести до еквівалентного їй диференціального рівняння n -го порядку?

3. Методом виключення невідомих функцій розв'язати наступні системи диференціальних рівнянь:

а) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y, \end{cases}$ відповідь: $\begin{cases} x = e^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t), \\ y = e^t (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t); \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 5x - 3y = 0, \\ \frac{dy}{dt} + 3x + y = 0, \end{cases}$ відповідь: $\begin{cases} x = e^{2t} (C_1 + 3C_2 t), \\ y = e^{2t} (C_2 - C_1 - 3C_2 t); \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}, \end{cases}$ відповідь: $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}, \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y, \end{cases}$ відповідь: $\begin{cases} x = C_1 (\cos 2t - \sin 2t) + C_2 (\cos 2t + \sin 2t), \\ y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + e^{-2t}. \end{cases}$

Симетрична форма системи диференціальних рівнянь

Якщо загальний розв'язок (5.7) нормальної системи n диференціальних рівнянь (5.4) розв'язати відносно довільних сталих:

$$\begin{cases} C_1 = \varphi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ C_2 = \varphi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \\ C_n = \varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \quad (5.21)$$

то кожне з n рівнянь (5.21) називають *першим інтегралом*, а їх сукупність утворює *загальний інтеграл* системи.

Означення. Першим інтегралом системи (5.4) називають скінченне рівняння

$$\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C, \quad (5.22)$$

яке перетворюється в тотожність при деякому значенні C , якщо замість y_1 , $y_2, \dots, y_n$ підставлено розв'язок системи (5.4)

Інколи першим інтегралом або просто інтегралом, називають також ліву частину рівняння (5.22), і тоді інтеграл визначається як функція, яка не дорівнює тотожно нулю та має стале значення вздовж інтегральних кривих системи (5.4).

З геометричної точки зору перший інтеграл (5.22) при фіксованому C можна тлумачити як n -вимірну поверхню в $(n + 1)$ -вимірному просторі з координатами $x, y_1, y_2, \dots, y_n$, яка характеризується тим, що коли інтегральна крива має спільну точку з цією поверхнею, то вона цілком знаходиться на поверхні.

Існування перших інтегралів системи (5.4) тісно пов'язане з існуванням її загального розв'язку. Справді, надаючи сталим $C_1, C_2, \dots, C_n$ в загальному розв'язку (5.7) певні числові значення, будемо діставати частинні розв'язки системи (5.4). Щоб знайти певний частинний розв'язок, наприклад, такий, що задовольняє початкові умови (5.6), треба визначити C_i з системи рівнянь

$$y0_i = y_i(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.23)$$

і підставити знайдені C_i в (5.7). На підставі теореми існування і єдиності розв'язку, рівняння (5.23) однозначно розв'язується відносно C_j . Отже, має бути

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(C_1, C_2, \dots, C_n)} \Big|_{x=x_0} \neq 0.$$

Звідси робимо висновок, що рівності (5.7) розв'язуються відносно C_i , оскільки x_0 є число довільне, тому матимемо

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.24)$$

тобто перші інтеграли системи (5.4), бо за самим походженням функції $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ перетворюються на константи, коли в них замість $y_1, y_2, \dots, y_n$ підставити розв'язок (5.7) системи (5.4). Оскільки рівності (5.24) мають розв'язуватися відносно $y_1, y_2, \dots, y_n$, тобто якобіан

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \neq 0,$$

то функції $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ є лінійно незалежними.

Таким чином, якщо відомий загальний розв'язок нормальної системи (5.4), то досить його подати у формі, розв'язаній відносно довільних сталих, щоб дістати n незалежних перших інтегралів.

Нормальна система (5.4) допускає не більше як n незалежних перших інтегралів. З теореми про існування і єдиність розв'язку системи випливає, що вона завжди має n незалежних перших інтегралів, тому якщо вдалося в який-небудь спосіб знайти n незалежних перших інтегралів системи, то задача її інтегрування закінчена.

Зазначимо, що один перший інтеграл дає можливість знизити порядок системи на одиницю.

Інтегрувати систему (5.4) за допомогою перших інтегралів зручніше, якщо вона задана у *симетричній формі*:

$$\frac{dy_1}{Y_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dy_2}{Y_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dx}{Y_0(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}, \quad (5.25)$$

де

$$f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{Y_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}{Y_0(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В системі, яка записана в симетричній формі, змінні входять рівноправно, що інколи полегшує знаходження перших інтегралів системи. У цьому випадку для знаходження перших інтегралів часто використовують так званий *метод інтегрованих комбінацій*, який являє собою цілеспрямовані спроби комбінування членів рівнянь (5.25) для того щоб одержати співвідношення між повними диференціалами.

Приклад. Знайти загальний інтеграл системи

$$\frac{dx}{y+x} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y}.$$

Розв'язання. Віднімаючи від першого дробу другий і третій (по черзі), і прирівнюючи результат, одержимо

$$\frac{dx - dy}{y - x} = \frac{dx - dz}{z - x},$$

ЗВІДСИ

$$\ln(x - y) = \ln(x - z) + \ln C_1$$

і отже, матимемо один з перших інтегралів у вигляді

$$\frac{x - y}{x - z} = C_1.$$

Аналогічно віднімаючи далі від другого дробу третій, одержимо інший перший інтеграл

$$\frac{x - y}{y - z} = C_2.$$

Сукупність одержаних перших інтегралів дає загальний інтеграл.

ПИТАННЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке загальний, частинний та перший інтеграли системи диференціальних рівнянь?
2. Який вигляд має симетрична форма системи диференціальних рівнянь?
3. Що таке інтегровані комбінації і як вони використовуються для знаходження загального інтеграла системи?

5.4. Лінійна система диференціальних рівнянь.

Загальні питання

Система диференціальних рівнянь називається *лінійною*, якщо вона лінійна відносно всіх невідомих функцій та їх похідних. Лінійна нормальна система n диференціальних рівнянь має вигляд

[illegible]

де $a_{ij}(x)$, $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – задані неперервні функції.

Якщо всі $f_i(x) = 0$, то систему (5.26) називають *лінійною однорідною*. Якщо хоча б одна з функцій $f_i(x) \neq 0$, то систему називають *лінійною неоднорідною*.

Для скорочення запису системи (5.26) досить часто використовують векторно-матричну форму

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{F} \, , \quad (5.27)$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Оскільки система (5.26) або (5.27), що теж саме, зводиться до одного лінійного рівняння n -го порядку, то на цьому етапі можна здійснити дослідження розглядуваної системи. Проте спробуємо безпосередньо навести окремі результати щодо лінійних систем.

Розглянемо лінійний оператор

$$L[\mathbf{Y}] = \frac{d\mathbf{Y}}{dx} - \mathbf{A}\mathbf{Y}, \quad (5.28)$$

що має властивості:

1) однорідність

$$L[C\mathbf{Y}] = CL[\mathbf{Y}],$$

де C – довільна стала;

2) адитивність

$$L[\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2] = L[\mathbf{Y}_1] + L[\mathbf{Y}_2].$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \frac{d(C\mathbf{Y})}{dx} - A(C\mathbf{Y}) &= C \left(\frac{d\mathbf{Y}}{dx} - \mathbf{A}\mathbf{Y} \right), \\ \frac{d(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2)}{dx} - A(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) &= \frac{d\mathbf{Y}_1}{dx} - \mathbf{A}\mathbf{Y}_1 + \frac{d\mathbf{Y}_2}{dx} - \mathbf{A}\mathbf{Y}_2. \end{aligned}$$

Завдяки цим властивостям можна стверджувати, що лінійна комбінація розв'язків $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_m$ лінійної однорідної системи $L[\mathbf{Y}] = 0$ з довільними сталими коефіцієнтами $C_1, C_2, \dots, C_m$ є розв'язком тієї ж системи.

Означення. Вектори $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ називають лінійно залежними на відрізку $a \leq x \leq b$, якщо існують сталі $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, які не всі дорівнюють нулю, такі що

$$\alpha_1 \mathbf{Y}_1 + \alpha_2 \mathbf{Y}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{Y}_n \equiv 0 \quad (5.29)$$

при $a \leq x \leq b$. Якщо ж тотожність (5.29) має місце лише тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то вектори $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ називають лінійно незалежними.

Якщо вектори $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ лінійно залежні, тобто існує система чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, серед яких є відмінні від нуля, що являє собою розв'язок системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь (5.29), то визначник цієї системи

$$W = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} \quad (5.30)$$

має дорівнювати нулю для всіх значень x відрізка $a \leq x \leq b$. Цей визначник називають *визначником Вронського* для системи векторів.

Теорема. Якщо визначник Вронського (5.30) розв'язків $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ лінійної однорідної системи рівнянь $L[Y] = 0$ з неперервними на відрізку $a \leq x \leq b$ коефіцієнтами $a_{ij}(x)$ ($i, j = \overline{1, n}$) дорівнює нулю хоча б в одній точці $x = x_0$ відрізка $a \leq x \leq b$, то розв'язки $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ лінійно залежні на тому ж відрізку.

Далі ми маємо змогу розглянути *теорему про структуру загального розв'язку лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь*.

Теорема. Лінійна комбінація

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n C_i Y_i(x), \quad (5.31)$$

де $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ – лінійно незалежні розв'язки лінійної однорідної системи $L[Y] = 0$ з неперервними на відрізку $a \leq x \leq b$ коефіцієнтами $a_{ij}(x)$ ($i, j = \overline{1, n}$), C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – довільні сталі, являє собою загальний розв'язок системи $L[Y] = 0$ на тому ж відрізку.

Доведення. За умов цієї теореми для лінійної однорідної системи $L[Y] = 0$ виконується теорема існування та єдиності розв'язків. Отже, для доведення теореми досить виявити, що підбором довільних сталих C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в розв'язку (5.31) можна задовольнити довільні початкові умови $Y(x_0) = Y_0$, на відрізку $a \leq x \leq b$, або ж системі рівнянь

$$Y_0 = \sum_{i=1}^n C_i Y_i(x_0).$$

Визначником цієї системи є визначник Вронського лінійно незалежної системи функцій $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ і тому не дорівнює нулю в жодній точці відрізка $a \leq x \leq b$. Теорема доведена.

На випадок *неоднорідної лінійної системи* стосовно *структури її загального розв'язку* можна навести таке твердження.

Теорема. Загальний розв'язок на відрізку $a \leq x \leq b$ лінійної неоднорідної системи

$$L[Y] = F \quad (5.32)$$

з неперервними на тому ж відрізку коефіцієнтами $a_{ij}(x)$ ($i, j = \overline{1, n}$) та правими частинами $f_i(x)$ дорівнює сумі загального розв'язку (5.31) відповідної однорідної системи і частинного розв'язку $\tilde{Y}(x)$ розглядуваної неоднорідної системи, тобто

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n C_i Y_i(x) + \tilde{Y}(x). \quad (5.33)$$

Доведення. По-перше, завдяки лінійності оператора (5.28) співвідношення (5.33) дає розв’язок системи (5.32). Далі, за умов цієї теореми діє теорема існування та єдиності розв’язків, тому досить виявити, що підбором довільних сталих в розв’язку (5.33) можна задовольнити будь-які початкові умови $\mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0$, тобто треба довести, що рівняння

$$Y_0 = \sum_{i=1}^n C_i Y_i(x_0) + \tilde{Y}(x_0) \quad (5.34)$$

при довільних правих частинах має розв'язок $C_1, C_2, \dots, C_n$. Останнє впливає з того, що визначником системи рівнянь (5.34) є визначник Вронського лінійно незалежних розв'язків $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$. *Теорема доведена.*

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку систему диференціальних рівнянь називають лінійною, лінійною однорідною, лінійною неоднорідною?
2. Векторно-матрична форма запису лінійної системи диференціальних рівнянь?
3. Яку систему векторів називають лінійно незалежною?
4. Який вигляд має загальний розв'язок лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь?
5. Що являє собою загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь?

5.5. Лінійна однорідна система диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера

Лінійна система диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n , \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n , \\ , \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n , \end{cases} \quad (5.35)$$

де a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) – сталі величини, називається *лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами*. Її можна записати у векторно-матричній формі

$$\frac{dY}{dx} = AY, \quad (5.36)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}.$$

Для розв'язання системи (5.35) або (5.36), що теж саме, застосуємо *метод Ейлера*. Суть цього метода полягає в тому, що частинний розв'язок системи (5.35) відшукується у вигляді

$$y_1 = \alpha_1 e^{kx}, y_2 = \alpha_2 e^{kx}, \dots, y_n = \alpha_n e^{kx} \quad (5.37)$$

або в матричній формі

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{kx} \\ \alpha_2 e^{kx} \\ \dots \\ \alpha_n e^{kx} \end{pmatrix},$$

тобто

$$Y = \tilde{A} e^{kx}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Підставляючи (5.37) у (5.35), після скорочення на e^{kx} ($e^{kx} \neq 0 \forall x \in R$), і перенесення членів в одну частину рівняння, дістаємо

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \dots, \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0, \end{cases} \quad (5.38)$$

або в матричній формі

$$(A - kE)\tilde{A} = 0 \quad (E - \text{одинична матриця}), \quad (5.39)$$

або

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = k\tilde{\mathbf{A}}. \quad (5.40)$$

Для того, щоб система (5.38) (відповідно (5.39)) мала нетривіальний (ненульовий) розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0, \quad (5.41)$$

або

$$\mathbf{A} - k\mathbf{E} = 0.$$

Рівняння (5.41) називають *характеристичним рівнянням* системи (5.35). З цього рівняння знаходимо ті значення k , при яких система (5.38) має нетривіальні розв'язки α_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Ліва частина рівняння (5.41) є многочленом степеня n змінної k . Відомо, що такий многочлен має n коренів

$$k_1, k_2, \dots, k_n \quad (5.42)$$

з урахуванням їх кратностей.

Якщо всі n коренів різні, то послідовно для кожного k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) з системи (5.38) знайдемо відповідний нетривіальний вектор

$$\tilde{\mathbf{A}}_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \dots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

Згідно з (5.40) маємо, що k_i є власні значення матриці $\mathbf{A}$, а вектори $\tilde{\mathbf{A}}_i$ – власні вектори $\mathbf{A}$.

Вектори $\tilde{\mathbf{A}}_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$), лінійно незалежні, якщо всі власні значення різні. Тому визначник з цих векторів відмінний від нуля.

Зауваження. Оскільки в n -вимірному просторі не може бути більше ніж n лінійно незалежних векторів, то кожному власному значенню k_i (якщо вони всі різні) відповідає тільки один власний вектор з точністю до сталого множника.

Таким чином дістаємо n вектор-функцій розв'язків системи (5.35):

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11}e^{k_1x} \\ \alpha_{21}e^{k_1x} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}e^{k_1x} \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12}e^{k_2x} \\ \alpha_{22}e^{k_2x} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{n2}e^{k_2x} \end{pmatrix}, \dots, Y_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n}e^{k_nx} \\ \alpha_{2n}e^{k_nx} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{nn}e^{k_nx} \end{pmatrix}, -\infty < x < +\infty. \quad (5.44)$$

Вектор-функції (5.44) утворюють лінійно незалежну систему на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, бо її визначник Вронського не дорівнює нулю.

Тому загальний розв'язок системи (5.35) при різних коренях характеристичного рівняння (5.41) має вигляд

$$Y = \sum_{i=1}^n C_i Y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.45)$$

де C_i – довільні сталі.

Зауваження. Система (5.38) для визначення сталих при $k = k_i$ має не єдиний розв'язок, бо її визначник дорівнює нулю, і тому щонайменше одне рівняння є наслідком інших. Довільний розв'язок цієї системи залишається її розв'язком після помноження на сталий множник.

Для кожної з невідомих функцій загальний розв'язок (5.45) можна ще записати так:

$$\begin{cases} y_1(x) = \sum_{i=1}^n C_i \alpha_{1i} e^{k_i x}, \\ y_2(x) = \sum_{i=1}^n C_i \alpha_{2i} e^{k_i x}, \\ \dots\dots\dots, \\ y_n(x) = \sum_{i=1}^n C_i \alpha_{ni} e^{k_i x}. \end{cases} \quad (5.46)$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3y + z, \\ \frac{dz}{dx} = 2y + 2z. \end{cases}$$

Розв'язання. Для розв'язання даної системи застосуємо метод Ейлера, тобто шукатимемо її частинний розв'язок у вигляді $y = \alpha_1 e^{kx}$, $z = \alpha_2 e^{kx}$. Тоді можемо скласти характеристичне рівняння типу (5.41):

$$\begin{vmatrix} 3-k & 1 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \text{ або } k^2 - 5k + 4 = 0.$$

Коренями цього рівняння є $k_1 = 1$, $k_2 = 4$ – числа дійсні різні. Для кореня $k_1 = 1$ складемо систему (5.38):

$$\begin{cases} (3-1)\alpha_{11} + \alpha_{21} = 0, \\ 2\alpha_{11} + (2-1)\alpha_{21} = 0, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} 2\alpha_{11} + \alpha_{21} = 0, \\ 2\alpha_{11} + \alpha_{21} = 0. \end{cases}$$

Ця система має безліч розв'язків $\alpha_{11} = -\frac{\alpha_{21}}{2}$, де α_{11} , α_{21} – залишаються довільними константами. Візьмемо одне з них, наприклад, якщо $\alpha_{21} = 1$, то $\alpha_{11} = -\frac{1}{2}$. Тоді кореню $k_1 = 1$ характеристичного рівняння відповідає частинний розв'язок

$$y_1 = -\frac{1}{2}e^x, \quad z_1 = e^x.$$

Далі складемо систему (5.38) для кореня $k_2 = 4$ і знаходимо α_{12} , α_{22} :

$$\begin{cases} -\alpha_{12} + \alpha_{22} = 0, \\ 2\alpha_{12} - 2\alpha_{22} = 0. \end{cases}$$

Оскільки друге рівняння є наслідком першого, то ця система також має безліч розв'язків $\alpha_{12} = \alpha_{22}$. Беремо одне з них $\alpha_{12} = \alpha_{22} = 1$. Тоді кореню $k_2 = 4$ характеристичного рівняння відповідає частинний розв'язок

$$y_2 = e^{4x}, \quad z_2 = e^{4x}.$$

Тепер можемо записати загальний розв'язок системи відповідно до (5.46)

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}C_1e^x + C_2e^{4x}, \\ z = C_1e^x + C_2e^{4x}. \end{cases}$$

Приклад. Проінтегрувати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

Розв'язання. Як і у попередньому прикладі для інтегрування даної системи застосуємо метод Ейлера, тобто шукатимемо її частинний розв'язок у вигляді

$$x = \alpha_1 e^{kt}, \quad y = \alpha_2 e^{kt}, \quad z = \alpha_3 e^{kt}.$$

Складемо характеристичне рівняння типу (5.41):

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 & 1 \\ 1 & 1-k & -1 \\ 2 & -1 & -k \end{vmatrix} = 0,$$

тобто

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0.$$

Коренями цього рівняння є $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = -1$ – числа дійсні різні. Для кореня $k_1 = 1$ складаємо систему (5.38):

$$\begin{cases} -\alpha_{21} + \alpha_{31} = 0, \\ \alpha_{11} - \alpha_{31} = 0, \\ 2\alpha_{11} - \alpha_{21} - \alpha_{31} = 0. \end{cases}$$

Ця система має безліч розв'язків $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{31}$. Візьмемо одне з них, наприклад, $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{31} = 1$. Тоді кореню $k_1 = 1$ характеристичного рівняння відповідає частинний розв'язок

$$x_1 = e^t, y_1 = e^t, z_1 = e^t.$$

Далі складаємо систему (5.38) для кореня $k_2 = 2$ і знаходимо α_{12} , α_{22} , α_{32} :

$$\begin{cases} -\alpha_{12} - \alpha_{22} + \alpha_{32} = 0, \\ \alpha_{12} - \alpha_{22} - \alpha_{32} = 0, \\ 2\alpha_{12} - \alpha_{22} - 2\alpha_{32} = 0. \end{cases}$$

Ця система також має безліч розв'язків $\alpha_{12} = \alpha_{32}$, $\alpha_{22} = 0$. Беремо одне з них $\alpha_{12} = \alpha_{32} = 1$, $\alpha_{22} = 0$. Тоді кореню $k_2 = 2$ характеристичного рівняння відповідає частинний розв'язок

$$x_2 = e^{2t}, y_2 = 0, z_2 = e^{2t}.$$

Нарешті для кореня $k_3 = -1$, маємо систему

$$\begin{cases} 2\alpha_{13} - \alpha_{23} + \alpha_{33} = 0, \\ \alpha_{13} + 2\alpha_{23} - \alpha_{33} = 0, \\ 2\alpha_{13} - \alpha_{23} + \alpha_{33} = 0. \end{cases}$$

Звідси $5\alpha_{13} = -\alpha_{33}$, $\alpha_{23} = 2\alpha_{13} + \alpha_{33}$. Нехай $\alpha_{13} = 1$, $\alpha_{23} = -3$, $\alpha_{33} = -5$, тоді кореню $k_3 = -1$ характеристичного рівняння відповідатиме частинний розв'язок

$$x_3 = e^{-t}, y_3 = -3e^{-t}, z_3 = -5e^{-t}.$$

Тепер можемо записати загальний розв'язок системи відповідно до (5.46)

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \\ y = C_1 e^t - 3C_3 e^{-t}, \\ z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t}. \end{cases}$$

Якщо характеристичне рівняння (5.41) має *комплексні корені*, то кожній парі комплексних спряжених коренів $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ будуть відповідати розв'язки

$$y_{j1} = \alpha_{j1} e^{k_1 x}, \quad y_{j2} = \alpha_{j2} e^{k_2 x} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Відомо, що дійсні та уявні частини комплексного розв'язку також є розв'язками. Таким чином, ми дістанемо частинні розв'язки у вигляді

$$\begin{cases} \tilde{y}_{j1} = e^{\alpha x} (\lambda_{j1} \cos \beta x + \lambda_{j2} \sin \beta x), \\ \tilde{y}_{j2} = e^{\alpha x} (\tilde{\lambda}_{j1} \sin \beta x + \tilde{\lambda}_{j2} \cos \beta x), \end{cases} \quad (5.47)$$

де $\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \tilde{\lambda}_{j1}, \tilde{\lambda}_{j2}$ – дійсні числа, що визначаються через α_{j1} і α_{j2} .

Відповідні комбінації функцій (5.47) увійдуть в загальний розв'язок системи.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3 - k & 2 \\ -1 & 1 - k \end{vmatrix} = 0, \text{ або } k^2 - 4k + 5 = 0.$$

Звідси $k_{1,2} = 2 \pm i$ – числа комплексні спряжені. Тоді цій парі коренів будуть відповідати розв'язки

$$x_1 = \alpha_{11} e^{(2+i)t}, \quad x_2 = \alpha_{12} e^{(2-i)t}, \quad y_1 = \alpha_{21} e^{(2+i)t}, \quad y_2 = \alpha_{22} e^{(2-i)t}.$$

Знайдемо комплексний розв'язок, що відповідає кореню $k_1 = 2 + i$. Підставляючи цей корінь у характеристичне рівняння, одержимо наступну систему для визначення α_{11} і α_{21} :

$$\begin{cases} (1 - i)\alpha_{11} + 2\alpha_{21} = 0, \\ -\alpha_{11} - (1 + i)\alpha_{21} = 0. \end{cases}$$

Як зазначалося вище, ця система має безліч розв'язків, один з них це

$$\alpha_{11} = -1 - i, \quad \alpha_{21} = 1.$$

Тоді маємо

$$x_1 = -(1 + i)e^{(2+i)t}, \quad y_1 = e^{(2+i)t},$$

або

$$x_1 = e^{2t}(\sin t - \cos t) - ie^{2t}(\sin t + \cos t), \quad y_1 = e^{2t}(\cos t + i \sin t).$$

Аналогічно для кореня $k_2 = 2 - i$, матимемо

$$\alpha_{12} = i - 1, \quad \alpha_{22} = 1,$$

тобто

$$x_2 = (i - 1)e^{(2-i)t}, \quad y_2 = e^{(2-i)t},$$

або

$$x_2 = e^{2t}(\sin t - \cos t) + ie^{2t}(\sin t + \cos t), \quad y_2 = e^{2t}(\cos t - i \sin t).$$

Частинними розв'язками типу (5.47) заданої системи будуть окремо дійсні та уявні частини:

$$\tilde{x}_1 = e^{2t}(\sin t - \cos t), \quad \tilde{x}_2 = e^{2t}(\cos t + \sin t), \quad \tilde{y}_1 = e^{2t} \cos t, \quad \tilde{y}_2 = e^{2t} \sin t.$$

Загальним розв'язком системи буде

$$\begin{cases} x = e^{2t}[(C_1 + C_2)\sin t + (C_2 - C_1)\cos t], \\ y = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t). \end{cases}$$

Нехай характеристичне рівняння (5.41) має *кратний корінь* k_1 кратності r . Якщо перейти від системи (5.35) до одного рівняння n -го порядку відносно функції $y_1(x)$, то утворене рівняння і система (5.35) будуть мати одне й те саме характеристичне рівняння. Тоді кореню k_1 кратності r відповідає розв'язок рівняння n -го порядку

$$y_1(x) = (C_0 + C_1x + \dots + C_{r-1}x^{r-1})e^{k_1x},$$

де $C_0, C_1, \dots, C_{r-1}$ – довільні сталі. Отже,

$$y_1(x) = Q_{1r-1}(x)e^{k_1x},$$

де $Q_{1r-1}(x)$ – многочлен степеня $r - 1$.

Аналогічно можна виразити й інші функції $y_i(x)$ у вигляді

$$y_i(x) = Q_{ir-1}(x)e^{k_1x}, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (5.48)$$

де $Q_{ir-1}(x)$ – многочлени степеня $r - 1$.

Кожна з функцій ($i = 1, 2, \dots, n$) задовольняє здобутому диференціальному рівнянню n -го порядку, якими б не були коефіцієнти многочлена $Q_{ir-1}(x)$.

Тепер з многочленів $Q_{ir-1}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) виберемо такі, щоб відповідні їм функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ були розв'язком системи (5.35). Для цього треба підставити $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ у систему (5.35), скоротити на e^{k_1x} і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x . Знайдені коефіцієнти залежатимуть від r довільних сталих.

Можна поступити інакше: спочатку взяти многочлен $Q_{1r-1}(x)$ довільним, і тоді коефіцієнти решти многочленів $Q_{ir-1}(x)$, $i = 2, 3, \dots, n$, визначатимуться однозначно через коефіцієнти $Q_{1r-1}(x)$. Проте при цьому іноді можна зайти у суперечність, яка покаже, що деякі коефіцієнти многочлена $Q_{1r-1}(x)$ дорівнюють нулю, і вважати їх довільними не можна.

Таке ж міркування проводять відносно інших кратних коренів (якщо вони є) характеристичного рівняння.

Щоб дістати загальний розв'язок системи (5.35), треба взяти комбінацію усіх розв'язків згідно з (5.31).

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь за допомогою метода Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ -1 & 4-k \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$k^2 - 6k + 9 = 0.$$

Звідси $k_1 = k_2 = 3$, тобто корінь $k_1 = 3$ має кратність $r = 2$. У цьому випадку ми не зможемо знайти два лінійно незалежних розв'язки даної системи рівнянь у вигляді $x = \alpha_1 e^{3t}$, $y = \alpha_2 e^{3t}$ (два лінійно незалежних розв'язки даного виду не існують). Тому розв'язок системи треба шукати у вигляді (5.48), а саме

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t) e^{3t}, \\ y = (A + Bt) e^{3t}. \end{cases}$$

Підставляючи ці функції в систему, дістанемо

$$C_2 + 3C_1 + 3C_2 t = 2C_1 + 2C_2 t + A + Bt,$$

$$B + 3A + 3Bt = 4A + 4Bt - C_1 - C_2 t.$$

Прирівнюючи в першому рівнянні коефіцієнти при однакових степенях t , одержимо

$$A = C_1 + C_2, \quad B = C_2.$$

Друге рівняння має ті самі розв'язки. Отже, загальний розв'язок заданої системи запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t) e^{3t}, \\ y = (C_1 + C_2 + C_2 t) e^{3t}. \end{cases}$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y - z, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$$

Розв'язання. Як і раніше для інтегрування даної системи застосуємо метод Ейлера. Складаємо характеристичне рівняння типу (5.41):

$$\begin{vmatrix} 4-k & -1 & -1 \\ 1 & 2-k & -1 \\ 1 & -1 & 2-k \end{vmatrix} = 0,$$

тобто

$$k^3 - 8k^2 + 21k - 18 = 0.$$

Звідси $k_1 = 2$ – простий, а $k_2 = 3$ – двократний корені. Для кореня $k_1 = 2$ система (5.38) має вигляд

$$\begin{cases} 2\alpha_{11} - \alpha_{21} - \alpha_{31} = 0, \\ \alpha_{11} - \alpha_{31} = 0, \\ \alpha_{11} - \alpha_{21} = 0. \end{cases}$$

Ця система має безліч розв'язків $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{31}$. Візьмемо одне з них, наприклад, $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{31} = 1$. Тоді кореню $k_1 = 2$ характеристичного рівняння відповідає частинний розв'язок

$$x_1 = e^{2t}, y_1 = e^{2t}, z_1 = e^{2t}.$$

Далі складаємо систему (5.38) для двократного кореня $k_2 = 3$:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матриці цієї системи дорівнює одиниці, тому ця система зводиться до одного рівняння: $\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0$, тобто маємо дві довільні змінні. Нехай це α_2, α_3 . Тоді матимемо два лінійно незалежних розв'язки, наприклад,

$$\alpha_{12} = 1, \alpha_{22} = 1, \alpha_{32} = 0; \quad \alpha_{13} = 1, \alpha_{22} = 0, \alpha_{32} = 1.$$

Кожному з цих розв'язків відповідає один частинний розв'язок заданої системи диференціальних рівнянь:

$$x_2 = e^{3t}, y_2 = e^{3t}, z_2 = 0; \quad x_3 = e^{3t}, y_3 = 0, z_3 = e^{3t}.$$

Тепер можемо записати загальний розв'язок даної системи диференціальних рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3) e^{3t}, \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}, \\ z = C_1 e^{2t} + C_3 e^{3t}. \end{cases}$$

Метод Ейлера можна також застосовувати при розв'язуванні систем лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків з сталими коефіцієнтами. У механіці, наприклад, досліджується система диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \quad (5.49)$$

Як і раніше шукатимемо розв'язок системи (5.49) у вигляді

$$x = \alpha_1 e^{kt}, \quad y = \alpha_2 e^{kt}. \quad (5.50)$$

Підставляючи (5.50) у (5.49) і скорочуючи на e^{kt} , одержуємо систему рівнянь для визначення α_1, α_2 і k :

$$\begin{cases} (a_{11} - k^2)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k^2)\alpha_2 = 0. \end{cases} \quad (5.51)$$

Відмінні від нуля α_1 і α_2 матимемо тільки у випадку, коли визначник системи (5.51) буде дорівнювати нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.52)$$

Це і є характеристичне рівняння для системи (5.49). Воно являє собою алгебраїчне рівняння 4-го порядку відносно k . Нехай k_1, k_2, k_3 і k_4 – корені (різні) рівняння (5.52). Для кожного кореня k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) із системи (5.51) знаходимо α_{1i} і α_{2i} . Загальний розв’язок, аналогічно (5.46), запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x = C_1 \alpha_{11} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_{12} e^{k_2 t} + C_3 \alpha_{13} e^{k_3 t} + C_4 \alpha_{14} e^{k_4 t}, \\ y = C_1 \alpha_{21} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_{22} e^{k_2 t} + C_3 \alpha_{23} e^{k_3 t} + C_4 \alpha_{24} e^{k_4 t}. \end{cases}$$

Якщо серед коренів характеристичного рівняння будуть комплексні, то кожній парі комплексних спряжених коренів у загальному розв’язку будуть відповідати співвідношення виду (5.47).

У випадку кратних коренів характеристичного рівняння використовують такі перетворення, як і для системи першого порядку.

Приклад. Знайти загальний розв’язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = x - 4y, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -x + y. \end{cases}$$

Розв’язання. Для розв’язання даної системи застосуємо метод Ейлера, тобто шукатимемо її частинний розв’язок у вигляді (5.50). Складаємо характеристичне рівняння виду (5.52):

$$\begin{vmatrix} 1 - k^2 & -4 \\ -1 & 1 - k^2 \end{vmatrix} = 0, \text{ або } k^4 - 2k^2 - 3 = 0.$$

Коренями цього рівняння є $k_1 = \sqrt{3}$, $k_2 = -\sqrt{3}$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$. Із системи (5.51) знаходимо α_{1j} і α_{2j} для кожного кореня k_i ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 1, \quad \alpha_{12} = 1, \quad \alpha_{13} = 1, \quad \alpha_{14} = 1, \\ \alpha_{21} &= -\frac{1}{2}, \quad \alpha_{22} = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_{23} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{24} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо такі частинні розв’язки

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{\sqrt{3}t}, \quad x_2 = e^{-\sqrt{3}t}, \quad \tilde{x}_3 = \cos t, \quad \tilde{x}_4 = \sin t, \\ y_1 &= -0,5e^{\sqrt{3}t}, \quad y_2 = -0,5e^{-\sqrt{3}t}, \quad \tilde{y}_3 = 0,5 \cos t, \quad \tilde{y}_4 = 0,5 \sin t. \end{aligned}$$

Тепер можемо записати загальний розв’язок:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\sqrt{3}t} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ y = -0,5C_1 e^{\sqrt{3}t} - 0,5C_2 e^{-\sqrt{3}x} + 0,5C_3 \cos t + 0,5C_4 \sin t. \end{cases}$$

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку систему диференціальних рівнянь називають лінійною однорідною з сталими коефіцієнтами?

2. Який метод застосовують при інтегруванні лінійних однорідних систем з сталими коефіцієнтами? У чому полягає його суть?

3. Методом Ейлера розв'язати системи диференціальних рівнянь:

а) $\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0, \end{cases}$ відповідь: $\begin{cases} x = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t}, \\ y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y' = 3y - z, \\ z' = 4y - z, \end{cases}$ відповідь: $\begin{cases} y = (C_1 + C_2 x) e^x, \\ z = (2C_1 - C_2 + 2C_2 x) e^x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x} = -7x + y, \\ \dot{y} = -2x - 5y, \end{cases}$ відповідь: $\begin{cases} x = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{-6t} [C_1 (\cos t - \sin t) + C_2 (\cos t + \sin t)]; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x, \\ \dot{y} = z + x, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z, \end{cases}$ відповідь: $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_3 e^{-t}, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \\ z = 2C_2 e^{2t} - C_3 e^{-t}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y, \\ \dot{y} = 2z + x, \\ \dot{z} = y - 2x - z, \end{cases}$ відповідь: $\begin{cases} x = C_2 \cos t + (C_2 + 2C_3) \sin t, \\ y = 2C_1 e^t + C_2 \cos t + (C_2 + 2C_3) \sin t, \\ z = C_1 e^t + C_3 \cos t - (C_2 + C_3) \sin t; \end{cases}$

є) $\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 2x + y - z, \end{cases}$ відповідь: $\begin{cases} x = (C_2 + C_3 t) e^{-t}, \\ y = 2C_1 e^t - (2C_2 + C_3 + 2C_3 t) e^{-t}, \\ z = C_1 e^t - (C_2 + C_3 + C_3 t) e^{-t}. \end{cases}$

$$\begin{array}{ll} \text{в)} \begin{cases} \dot{x} = -7x + y, \\ \dot{y} = -2x - 5y, \end{cases} & \text{ВІДПОВІДЬ: } \begin{cases} x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{-6t}[C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t)]; \end{cases} \\ \\ \text{г)} \begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x, \\ \dot{y} = z + x, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z, \end{cases} & \text{ВІДПОВІДЬ: } \begin{cases} x = C_1 e^t + C_3 e^{-t}, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \\ z = 2C_2 e^{2t} - C_3 e^{-t}; \end{cases} \\ \\ \text{д)} \begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y, \\ \dot{y} = 2z + x, \\ \dot{z} = y - 2x - z, \end{cases} & \text{ВІДПОВІДЬ: } \begin{cases} x = C_2 \cos t + (C_2 + 2C_3) \sin t, \\ y = 2C_1 e^t + C_2 \cos t + (C_2 + 2C_3) \sin t, \\ z = C_1 e^t + C_3 \cos t - (C_2 + C_3) \sin t; \end{cases} \\ \\ \text{є)} \begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 2x + y - z, \end{cases} & \text{ВІДПОВІДЬ: } \begin{cases} x = (C_2 + C_3 t) e^{-t}, \\ y = 2C_1 e^t - (2C_2 + C_3 + 2C_3 t) e^{-t}, \\ z = C_1 e^t - (C_2 + C_3 + C_3 t) e^{-t}. \end{cases} \end{array}$$

5.6. Лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами. Метод Лагранжа

Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь першого порядку у вигляді

[illegible]

де a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) – сталі величини; $f_i(x)$ – задані неперервні функції. Її можна записати у векторно-матричній формі

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{F} , \quad (5.53)$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь (п. 5.4 співвідношення (5.33)), загальний розв'язок системи (5.53) на відрізку $a \leq x \leq b$ можна записати у вигляді

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n C_i Y_i(x) + \tilde{Y}(x),$$

де $\sum_{i=1}^n C_i Y_i(x)$ – загальний розв'язок відповідної однорідної системи виду (5.35)

або (5.36); $\tilde{Y}(x)$ – частинний розв'язок розглядуваної неоднорідної системи (5.53).

Якщо відомо загальний розв'язок однорідної системи (5.35), то частинний розв'язок неоднорідної системи (5.53) знаходять *методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)*.

Нехай

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n C_i Y_i(x)$$

є загальним розв'язком однорідної системи (5.35), тобто $Y_i(x)$ – лінійно незалежні частинні розв'язки, отже $L[Y_i(x)] \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Вважатимемо $C_i = C_i(x)$ функціями від x і підберемо їх так, щоб вектор-функція

$$U(x) = \sum_{i=1}^n C_i(x) Y_i(x) \quad (5.54)$$

була розв'язком неоднорідної системи (5.53). Диференціюючи (5.54) по x , маємо

$$U'(x) = \sum_{i=1}^n [C_i(x) Y_i'(x) + C_i'(x) Y_i(x)]. \quad (5.55)$$

Підставляючи (5.54) і (5.55) у (5.53), дістаємо

$$\sum_{i=1}^n [C_i(x) Y_i'(x) + C_i'(x) Y_i(x)] - \sum_{i=1}^n C_i(x) A Y_i(x) = F$$

або

$$\sum_{i=1}^n C_i'(x) Y_i(x) + \sum_{i=1}^n C_i(x) L[Y_i(x)] = F.$$

Оскільки $L[Y_i(x)] = 0$, то для визначення $C_i(x)$ матимемо систему

$$\sum_{i=1}^n C_i'(x) Y_i(x) = F \quad (5.56)$$

з неперервними на (a, b) вектор-функціями F і $Y_i(x)$.

Система (5.56) лінійна відносно $C_i'(x)$ з визначником, який дорівнює визначнику Вронського системи векторів $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, ..., $Y_n(x)$. Оскільки визначник відмінний від нуля, то система (5.56) має єдиний розв'язок

$$C_i'(x) = \varphi_i(x) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (5.57)$$

Функції $\varphi_i(x)$ неперервні, бо неперервні вектор-функції F і $Y_i(x)$. Інтегруючи (5.57), знаходимо

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x) dx = \Phi_i(x) + \tilde{C}_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.58)$$

Тут $\tilde{C}_i$ – довільні сталі.

Підставляючи (5.58) у (5.54), дістанемо загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами (5.53).

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x + \frac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку, одним із методів, викладених у попередніх параграфах, знайдемо загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}. \end{cases}$$

Загальний розв'язок заданої неоднорідної системи шукатимемо методом Лагранжа у вигляді

$$\begin{cases} x = C_1(t) e^t + C_2(t) e^{-t}, \\ y = C_1(t) e^t - C_2(t) e^{-t}. \end{cases} \quad (5.59)$$

Система (5.56) для визначення $C_1(t)$ і $C_2(t)$ у даному випадку має вигляд

$$\begin{cases} C_1'(t) e^t + C_2'(t) e^{-t} = 0, \\ C_1'(t) e^t - C_2'(t) e^{-t} = \frac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases}$$

Звідси

$$C_1'(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \left(\frac{1}{t^2} + \ln t \right), \quad C_2'(t) = -\frac{1}{2} e^t \left(\frac{1}{t^2} + \ln t \right).$$

Інтегруючи, знаходимо

$$C_1(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} \left(\frac{1}{t} + \ln t \right) + \tilde{C}_1, \quad C_2(t) = \frac{1}{2} e^t \left(\frac{1}{t} - \ln t \right) + \tilde{C}_2,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі. Підставляючи знайдені $C_1(t)$ і $C_2(t)$ у (5.59), одержимо загальний розв'язок даної системи:

$$\begin{cases} x = \tilde{C}_1 e^t + \tilde{C}_2 e^{-t} - \ln t, \\ y = \tilde{C}_1 e^t + \tilde{C}_2 e^{-t} - \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Частинний розв'язок лінійної неоднорідної системи (5.53) можна шукати і методом невизначених коефіцієнтів, якщо функції $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) мають так званий спеціальний вид, тобто складені із сум і добутків функцій

$$b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m, e^{\alpha x}, \cos \beta x, \sin \beta x.$$

У цьому випадку користуються тими ж правилами, що і для одного лінійного рівняння з сталими коефіцієнтами (п. 4.3) з такою різницею.

1. Якщо $f_i(x) = P_{m_i}(x)e^{\alpha x}$, де $P_{m_i}(x)$ – многочлен степеня m_i , то частинний розв'язок системи (5.53) відшукується не у вигляді $x^r Q_m(x)e^{\alpha x}$, а у вигляді

$$y_i = Q_{m+r}^i(x)e^{\alpha x} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.60)$$

де $Q_{m+r}^i(x)$ – многочлен степеня $m+r$ з невідомими коефіцієнтами; $m = \max m_i$, $r = 0$, якщо α – не є коренем характеристичного рівняння (5.41), а якщо α – корінь, то r дорівнює кратності цього кореня. Невідомі коефіцієнти многочленів визначаються шляхом підстановки співвідношень (5.60) у систему (5.53) і порівняння коефіцієнтів подібних членів.

2. У випадку коли функції $f_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) містять $e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $e^{\alpha x} \sin \beta x$, тобто мають вигляд

$$f_i(x) = P_{m_i}(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + R_{l_i}(x)e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad (5.61)$$

частинний розв'язок системи (5.53) відшукується у вигляді

$$y_i = e^{\alpha x} (U_{s+r}^i(x) \cos \beta x + V_{s+r}^i(x) \sin \beta x) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.62)$$

де $U_{s+r}^i(x)$, $V_{s+r}^i(x)$ – многочлени степеня $s+r$ з невідомими коефіцієнтами; $s = \max(m_i, l_i)$, r – число коренів характеристичного рівняння (5.41), які дорівнюють $\alpha \pm i\beta$.

Приклад. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 5 \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідної однорідної системи. Характеристичне рівняння $k^2 - k - 2 = 0$ має корені $k_1 = -1$ і $k_2 = 2$, тому загальний розв'язок відповідної однорідної системи запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}. \end{cases}$$

Частинний розв'язок неоднорідної системи знайдемо методом невизначених коефіцієнтів, оскільки $f_1(t) = -5 \cos t$, $f_2(t) = 0$, тобто функція $f_1(t)$ має спеціальний вид (5.61), а саме:

$$P_{m_1}(t) = -5, \quad m_1 = 0, \quad R_{l_1}(t) = 0, \quad l_1 = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1,$$

число $\alpha \pm i\beta = \pm i$ не є коренем характеристичного рівняння. Отже, згідно з (5.62), частинний розв'язок неоднорідної системи шукатимемо у вигляді

$$x = A_1 \cos t + B_1 \sin t,$$

$$y = A_2 \cos t + B_2 \sin t.$$

Підставляючи ці співвідношення у дану систему, і зрівнюючи коефіцієнти подібних членів (при $\cos t$ і $\sin t$), одержимо систему для визначення коефіцієнтів A_1, A_2, B_1, B_2 :

$$\begin{cases} B_1 - A_2 = -5, \\ A_1 + B_2 = 0, \\ B_2 - 2A_1 - A_2 = 0, \\ 2B_1 + A_2 + B_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$A_1 = -1, \quad A_2 = 3, \quad B_1 = -2, \quad B_2 = 1.$$

Отже, частинний розв'язок має вигляд

$$x = -\cos t - 2 \sin t, \quad y = 3 \cos t + \sin t.$$

Загальний розв'язок даної неоднорідної системи запишемо, використовуючи теорему про структуру загального розв'язку неоднорідної системи (співвідношення (5.33)):

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - \cos t - 2 \sin t, \\ y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} + 3 \cos t + \sin t. \end{cases}$$

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку систему диференціальних рівнянь називають лінійною неоднорідною з сталими коефіцієнтами?

2. Які методи застосовують при інтегруванні лінійних неоднорідних систем з сталими коефіцієнтами? У чому полягає їх суть?

3. Знайти загальний розв'язок наступних систем диференціальних рівнянь:

а) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y, \end{cases}$ відповідь: $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{4t} + 3e^{5t}, \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{4t} + e^{5t}; \end{cases}$

$$\text{б) } \begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}, \end{cases} \quad \text{ВІДПОВІДЬ: } \begin{cases} x = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}, \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + 2 \sin x, \\ y_2' = 2y_1 - y_2, \end{cases}$$

ВІДПОВІДЬ:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x - x \cos x, \\ y_2 = C_1 (\sin x + \cos x) + C_2 (\sin x - \cos x) - 2x \cos x + \sin x + \cos x; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} y_1' = -4y_1 - 2y_2 + \frac{2}{e^x - 1}, \\ y_2' = 6y_1 + 3y_2 - \frac{3}{e^x - 1}, \end{cases}$$

$$\text{ВІДПОВІДЬ: } \begin{cases} y_1 = C_1 + 2C_2 e^{-x} + 2e^{-x} \ln|e^x - 1|, \\ y_2 = -2C_1 - 3C_2 e^{-x} - 3e^{-x} \ln|e^x - 1|; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t \sqrt{t}, \end{cases}$$

$$\text{ВІДПОВІДЬ: } \begin{cases} x = \left(C_1 + 2C_2 t - 8\sqrt{t^5} \right) e^t, \\ y = \left(C_1 + 2C_2 t - C_2 - 8\sqrt{t^5} + 10\sqrt{t^3} \right) e^t. \end{cases}$$

РОЗДІЛ 6

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ

6.1. Основні означення та теореми. Стійкість за Ляпуновим

При дослідженні реальних процесів і явищ, що описуються диференціальними рівняннями та їх системами, на практиці виникає необхідність не тільки у відшуванні їх розв'язку, а й у виявленні різних властивостей цих розв'язків. Оскільки знайти розв'язки у загальному випадку не можливо, то виникає питання про вивчення властивостей розв'язків диференціальних рівнянь, не маючи цих розв'язків, за їх непрямыми ознаками і властивостями диференціальних рівнянь. Це питання розглядається в якісній теорії диференціальних рівнянь, одним з основних розділів якої є теорія стійкості розв'язків.

Розглянемо деякий процес, що описується системою диференціальних рівнянь

$$y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6.1)$$

з початковими умовами

$$y_i(x_0) = y_{0i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6.2)$$

Умови (6.2) є результатами експерименту і тому не зовсім точні.

Якщо малі зміни початкових умов дають великі відхилення розв'язків, то такі розв'язки системи не придатні, вони навіть наближено не описують розглядуваний процес. Тому важливо знати умови, при яких малі зміни початкових даних (6.2) дають малі відхилення розв'язків системи (6.1).

Якщо змінна x розглядається у досить малому проміжку, то відповідь на поставлене питання дає теорема існування і єдиності розв'язку.

Теорема про неперервну залежність розв'язку від початкових умов. Якщо права частина диференціального рівняння

$$y' = f(x, y) \quad (6.3)$$

неперервна і по змінній y має обмежену частинну похідну, $|f'_y| \leq M$ у прямокутнику $D\{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$, то розв'язок рівняння (6.3) $y(x, x_0, y_0)$, що задовольняє початкові умови $y(x_0) = y_0$, неперервно залежить від початкових даних.

Тобто для $\forall \varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що коли $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta$, то

$$|y(x, x_0, y_0) - y(x, x_0, \bar{y}_0)| < \varepsilon$$

при

$$|x - x_0| < X, \quad X < X_0, \quad X_0 = \min \left\{ a, \frac{1}{M}, \frac{1}{N} \right\}, \quad N = \max_{(x,y) \in D} |f(x,y)|.$$

Аналогічне твердження справедливе й для системи (6.1).

При виконанні всіх умов теореми про неперервну залежність розв'язку від початкових умов говорять, що *задача коректно поставлена*.

Якщо тепер аргумент $x \in [x_0, \infty)$ може набувати довільних значень, то на питання о залежності розв'язків від початкових умов відповідає теорія стійкості.

Означення. Нехай $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ – розв'язок системи (6.1). Розв'язок $\varphi(x)$ системи (6.1) називають *стійким за Ляпуновим*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для довільного розв'язку $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ тієї самої системи, початкові значення якого задовольняють нерівностям

$$|y_i(x_0) - \varphi_i(x_0)| < \delta \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

справедливі нерівності

$$|y_i(x) - \varphi_i(x)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \forall x \in [x_0, \infty).$$

Таким чином, розв'язок $\varphi(x)$ стійкий за Ляпуновим, якщо близькі до нього розв'язки при початкових умовах залишаються близькими і для всіх $x \geq x_0$.

Якщо розв'язок стійкий за Ляпуновим і, крім того,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |y_i(x) - \varphi_i(x)| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6.4)$$

то його називають *асимптотично стійким* (рис. 6.1).

Зазначимо, що з (6.4) не випливає стійкість за Ляпуновим.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}, \quad y(x_0) = y_0.$$

Розв'язання. Загальним розв'язком даного лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку є функція

$$y = \frac{C - \cos x}{x},$$

а розв'язком задачі Коші є

$$y = \frac{y_0 x_0 + \cos x_0 - \cos x}{x}.$$

Якщо тепер задамо інші початкові умови $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$, то розв'язок задачі Коші матиме вигляд

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_0 x_0 + \cos x_0 - \cos x}{x}.$$

Отже,

$$|y - \bar{y}| = |y_0 - \bar{y}_0| \frac{x_0}{x} \leq |y_0 - \bar{y}_0| \quad \text{при} \quad x_0 \leq x.$$

Тому якщо $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta = \varepsilon$, то $|y - \bar{y}| < \varepsilon$, тобто розв'язок $y = \frac{y_0 x_0 + \cos x_0 - \cos x}{x}$ стійкий за Ляпуновим при $x \geq x_0$.

Цей розв'язок також і асимптотично стійкий, оскільки

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |y - \bar{y}| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[|y_0 - \bar{y}_0| \frac{x_0}{x} \right] = 0.$$

Для наочності зобразимо на графіці (рис.6.1) розв'язки:

$$y = \frac{y_0 x_0 + \cos x_0 - \cos x}{x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad y_0 = 1;$$

$$\bar{y}_1 = y_1 = \frac{\bar{y}_{10} x_0 + \cos x_0 - \cos x}{x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \bar{y}_{10} = y_{10} = 0,8;$$

$$\bar{y}_2 = y_2 = \frac{\bar{y}_{20} x_0 + \cos x_0 - \cos x}{x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \bar{y}_{20} = y_{20} = 1,25.$$

Таким чином, малі зміни початкових даних дійсно дають малі відхилення розв'язків, а при $x \rightarrow \infty$ ці відхилення прямують до нуля.

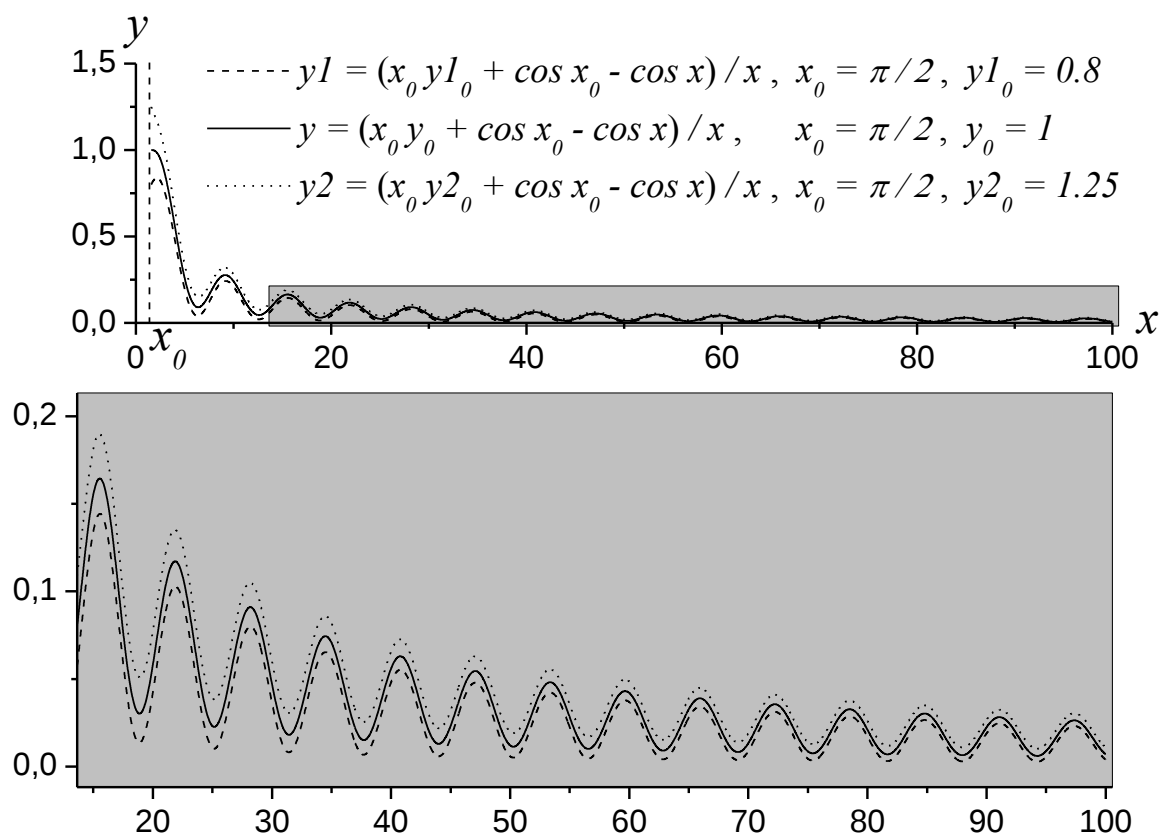


Рис. 6.1

Дослідження на стійкість за Ляпуновим довільного розв'язку

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)) \quad (6.5)$$

системи (6.1) можна звести до дослідження на стійкість тривіального (тотожно рівного нулю) розв'язку деякої іншої системи. Для цього треба перейти до нових невідомих функцій за формулою $z_i(x) = y_i(x) - \varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Звідси

$$y'_i(x) = z'_i(x) + \varphi'_i(x).$$

Тоді систему (6.1) можна записати у вигляді

$$z'_i(x) = f_i(x, z_1(x) + \varphi_1(x), \dots, z_n(x) + \varphi_n(x)) - f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)). \quad (6.6)$$

Ця система має тривіальний розв'язок

$$z_i(x) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6.7)$$

Теорема. Розв'язок (6.5) системи (6.1) стійкий за Ляпуновим (асимптотично стійкий) тоді і тільки тоді, коли стійкий за Ляпуновим (асимптотично стійкий) тривіальний розв'язок (точка спокою) системи (6.6).

Цей розв'язок має таку властивість: при зміні x точка $(z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x))$ не рухається, а залишається на місці. Розв'язок (6.7) називають *положенням рівноваги системи* (6.1), а точку $(0, 0, \dots, 0)$ – *точкою спокою*.

У свою чергу точка спокою системи (6.6) стійка за Ляпуновим, якщо $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що з нерівності $|z_i(x_0)| < \delta(\varepsilon)$, випливає нерівність

$$|z_i(x)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \forall x \in [x_0, \infty).$$

Слід зазначити, що методи дослідження систем на стійкість розділені Ляпуновим на дві групи. До першої віднесені прийоми дослідження систем на стійкість, які використовують розв'язки цих систем або їхні оцінки. Сукупність методів першої групи названа ним першим методом і в літературу увійшла як перший метод Ляпунова.

До другої групи Ляпунов відніс методи і прийоми, які використовують непрямі ознаки, за якими встановлюється стійкість точки спокою систем. Ця сукупність способів названа Ляпуновим як другий метод Ляпунова.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

$$y'_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6.8)$$

Для неї точка спокою $y_i = y_i(x) \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Введемо систему (6.8) в окіл цієї точки заміною $y_i = \Delta y_i$. Тоді матимемо систему

$$\Delta y'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta y_j \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Характеристичне рівняння для цієї системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (6.9)$$

Нехай k_i – простий дійсний корінь рівняння (6.9). Тоді знаходимо

$$\Delta y_i = C_i e^{k_i x} \quad \text{і} \quad |\Delta y_i| = |C_i| e^{k_i x}.$$

Розглянемо поведінку цього розв'язку при $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\Delta y_i| = \begin{cases} 0, & k_i < 0; \\ \infty, & k_i > 0. \end{cases}$$

Нехай тепер k_i – дійсний корінь кратності m , тоді

$$\Delta y_i = C_i x^{m-1} e^{k_i x} \quad \text{і} \quad |\Delta y_i| = |C_i| x^{m-1} e^{k_i x}.$$

Для цього розв'язку маємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\Delta y_i| = \begin{cases} 0, & k_i < 0; \\ \infty, & k_i > 0. \end{cases}$$

І нарешті, нехай k_i – комплексно-спряжений корінь кратності m , тоді

$$\Delta y_i = C_i x^{m-1} e^{(\alpha \pm i\beta)x} \quad \text{і} \quad |\Delta y_i| = |C_i| x^{m-1} e^{\alpha x},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\Delta y_i| = \begin{cases} 0, & \alpha < 0; \\ \infty, & \alpha > 0. \end{cases}$$

Узагальнюючи ці випадки, дістаємо таке твердження.

Теорема. Розв'язки лінійної системи диференціальних рівнянь (6.8) із сталими коефіцієнтами тоді і тільки тоді

➤ *стійкі, коли дійсні частини власних значень коефіцієнтів a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) недодатні, причому значенням з нульовою дійсною частиною відповідають одновимірні клітини Жордана, тобто такі власні значення мають прості елементарні ділянки;*

➤ *асимптотично стійкі, коли дійсні частини власних значень коефіцієнтів a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) від'ємні;*

➤ *нестійкі, коли хоча б одному власному значенню коефіцієнтів a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) з нульовою дійсною частиною відповідає не одновимірна клітина Жордана (таке власне значення має простий елементарний дільник) або коли дійсна частина принаймні одного власного значення коефіцієнтів a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) додатна.*

Наприклад, розв'язки системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = y_2; \\ y_2' = py_1 - y_2, \end{cases}$$

стійкі при $p = 0$, асимптотично стійкі при $p < 0$ і нестійкі при $p > 0$, бо власні значення коефіцієнтів, тобто матриці $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix}$ дорівнюють значенням

$$k_1 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + p} \quad \text{і} \quad k_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + p}.$$

У першому випадку ці значення недодатні і прості, у другому – мають від'ємні дійсні частини, у третьому – одне із значень додатне.

Отже, для систем із сталими коефіцієнтами при розв'язуванні задачі на стійкість важливо з'ясувати, який знак має дійсна частина коренів характеристичного рівняння.

Умови, при яких дійсні частини власних значень коефіцієнтів a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) від'ємні, задаються наступною теоремою.

Теорема Раусса – Гурвіца. Дійсні частини всіх коренів рівняння

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

від'ємні тоді і тільки тоді, коли додатними є всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

тобто коли

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} > 0.$$

Приклад. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння

$$y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0.$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^3 + 5k^2 + 9k + 5 = 0.$$

У цьому разі $a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 9$, $a_3 = 5$.

Випишемо діагональні мінори Гурвіца:

$$\Delta_1 = a_1 = 5 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 40 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 200 > 0.$$

Отже, тривіальний розв'язок заданого рівняння асимптотично стійкий.

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. При виконанні яких умов говорять, що задача поставлена коректно?
2. Який розв'язок називають стійким за Ляпуновим? При виконанні якої умови розв'язок є асимптотично стійкий?
3. Який розв'язок називають положенням рівноваги системи? Що таке точка спокою?
4. Теорема про стійкість розв'язків лінійної системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами?
5. Теорема Рауса – Гурвіца?
6. Користуючись означенням стійкості за Ляпуновим, з'ясувати, будуть стійкі чи ні розв'язки даних рівнянь, що задовольняють задані початкові умови:
 - а) $\dot{x} = \frac{2x}{t}$, $x(1) = 0$, відповідь: *нестійкий*;
 - б) $y' = 1 + x - y$, $y(0) = 0$, відповідь: *асимптотично стійкий*.
7. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок даних диференціальних рівнянь:
 - а) $y''' - 3y' + 2y = 0$, відповідь: *нестійкий*;
 - б) $y''' - 3y'' + 12y' - 10y = 0$, відповідь: *нестійкий*;
 - в) $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0$, відповідь: *асимптотично стійкий*;
 - г) $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$, відповідь: *нестійкий*;
 - д) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$, відповідь: *асимптотично стійкий*;
 - е) $y''' + 27y = 0$, відповідь: *нестійкий*.

6.2. Дослідження на стійкість за першим наближенням

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$y'_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6.10)$$

Нехай $y_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) є точкою спокою системи (6.10), і нехай функції $f_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$ диференційовні в початку координат достатнє число раз.

Розвинемо функції $f_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в ряд Тейлора по степенях y_i в околі початку координат. Одержимо

$$y'_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k + R_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6.11)$$

де

$$a_{ik} = \frac{\partial f_i(0, 0, \dots, 0)}{\partial y_k},$$

а $R_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$ – члени другого порядку мализни відносно $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Розглянемо окремо систему

$$y'_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6.12)$$

яку називають *системою першого наближення для системи (6.10)*.

Відомі такі твердження.

1. Якщо всі корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \quad (6.13)$$

мають від'ємні дійсні частини, то нульовий розв'язок $y_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) систем (6.12) і (6.11) **асимптотично стійкий**.

2. Якщо хоча б один корінь характеристичного рівняння (6.13) має додатну дійсну частину, то нульовий розв'язок системи (6.11) **нестійкий**.

3. Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння (6.13) недодатні, причому дійсна частина хоча б одного кореня дорівнює нулю, то дослідження на стійкість за першим наближенням, взагалі кажучи, **неможливе** (починають впливати нелінійні члени $R_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$).

Приклад. Дослідити на стійкість за першим наближенням точку спокою $x = 0, y = 0$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 5y^2, \\ \dot{y} = 3x + y + \frac{1}{2}x^3. \end{cases}$$

Розв'язання. Розглянемо систему першого наближення

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$$

Нелінійні члени задовольняють потрібні умови: їх порядок ≥ 2 . Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 3 & 1-k \end{vmatrix} = 0, \text{ або } k^2 - 3k - 1 = 0.$$

Звідси матимемо

$$k_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \quad k_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

Отже, оскільки $k_1 > 0$, то нульовий розв'язок заданої системи нестійкий.

ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок наступних систем:

1.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y, \end{cases}$$
 відповідь: *асимптотично стійкий*.
2.
$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y, \end{cases}$$
 відповідь: *нестійкий*.
3.
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y, \end{cases}$$
 відповідь: *нестійкий*.
4.
$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(z - y) - 2x, \\ \dot{y} = \sqrt{9+12x} - 3e^y, \\ \dot{z} = -3y, \end{cases}$$
 відповідь: *асимптотично стійкий*.

6.3. Метод функцій Ляпунова

Метод дослідження на стійкість, викладений у попередньому пункті не завжди дає відповідь на поставлене запитання.

Наприкінці XIX століття російський математик О. М. Ляпунов запропонував загальний метод дослідження на стійкість розв'язків системи диференціальних рівнянь (6.1). У цьому методі заданій системі рівнянь ставиться у відповідність деяка функція $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$, яку називають функцією Ляпунова, і по її властивостях можна робити висновок про стійкість розв'язку.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (6.10) у припущенні, що функції $f_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$ визначені, неперервні і диференційовні в околі початку координат, а точка $y_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) є точкою спокою системи (6.10).

Нехай $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – деякий розв'язок системи (6.10). Вздовж інтегральної кривої цього розв'язку функція $V = V(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ неперервно диференційовна, і її похідна це

$$\frac{dV}{dx} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} f_i(y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (6.14)$$

Теорема Ляпунова про стійкість. Якщо для системи (6.10) існує диференційовна функція $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$ (функція Ляпунова), що задовольняє в околі початку координат такі умови:

1) $V(y_1, y_2, \dots, y_n) \geq 0$, причому $V = 0$ лише при $y_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), тобто функція $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$ має строгий мінімум у початку координат;

$$2) \frac{dV}{dx} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq 0 \text{ при } x \geq x_0,$$

то тривіальний розв'язок $y_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (точка спокою) стійкий.

Приклад. Дослідити на стійкість точку спокою $y_1 \equiv y_2 \equiv 0$ системи рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 y_2^4, \\ y_2' = y_2 y_1^4. \end{cases}$$

Розв'язання. Функція $V(y_1, y_2) = y_1^4 + y_2^4$ задовольняє умови теореми Ляпунова про стійкість:

$$1) V(y_1, y_2) = y_1^4 + y_2^4 \geq 0, V(0,0) = 0;$$

$$2) \frac{dV}{dx} = -4y_1^4 y_2^4 + 4y_1^4 y_2^4 \equiv 0$$

Отже, точка спокою $y_1 \equiv y_2 \equiv 0$ заданої системи стійка.

Приклад. Дослідити на стійкість тривіальний (нульовий) розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^3 + by, \\ \dot{y} = cx + dy^5. \end{cases}$$

Розв'язання. Скористаємося критерієм стійкості за першим наближенням. Система рівнянь першого наближення в даному випадку має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = by, \\ \dot{y} = cx. \end{cases}$$

Складаємо характеристичне рівняння виду (6.13):

$$k^2 - bc = 0.$$

Якщо $bc > 0$, то корені характеристичного рівняння дійсні і мають різні знаки, отже тривіальний розв'язок даної системи нестійкий.

Для інших значень параметрів b і c , тобто при $bc \leq 0$, виходячи з критерію стійкості за першим наближенням, не можна зробити висновок про стійкість або нестійкість тривіального розв'язку заданої системи, оскільки маємо критичний випадок – дійсні частини коренів характеристичного рівняння дорівнюють нулю.

Застосуємо метод функцій Ляпунова. Оскільки права частина кожного із даних рівнянь являє собою суму двох функцій, одна з яких залежить тільки від x , а інша – тільки від y , шукатимемо функцію $V(x, y)$ у вигляді $V(x, y) = A(x) + B(y)$, де $A(x)$ і $B(y)$ – неперервно диференційовні в околі початку координат функції і такі, що $A(0) = B(0) = 0$. Згідно з (6.14)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dA}{dx}(ax^3 + by) + \frac{dB}{dy}(cx + dy^5).$$

Поставимо умову, щоб $\frac{dV}{dt}$ також була сумою двох функцій, одна з яких – функція тільки від x , а друга – від y . Це можливо, якщо

$$\frac{dA}{dx}by + \frac{dB}{dy}cx = 0.$$

Остання рівність виконується, якщо $\frac{by}{\frac{dB}{dy}} = -\frac{cx}{\frac{dA}{dx}} = \lambda = \text{const}$. Тоді $\frac{dB}{dy} = \frac{by}{\lambda}$, $\frac{dA}{dx} = -\frac{cx}{\lambda}$.

Звідси

$$B(y) = \frac{by^2}{2\lambda}, \quad A(x) = \frac{-cx^2}{2\lambda},$$

тобто $V(x, y) = \frac{by^2 - cx^2}{2\lambda}$. Функція $V(x, y)$ при $bc < 0$ є знаковизначеною, її похідна

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dby^6 - acx^4}{\lambda}.$$

Якщо $a \leq 0$, $d \leq 0$ і $bc < 0$, то виконуються умови теореми Ляпунова про стійкість; тому при вказаних значеннях параметрів a , b , c , d тривіальний розв'язок даної системи стійкий.

Якщо $a < 0$, $d > 0$ і $bc < 0$, то виконуються умови теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість, тобто при цих значеннях параметрів a , b , c , d тривіальний розв'язок даної системи асимптотично стійкий.

Якщо $a > 0$, $d < 0$ і $bc < 0$, то виконуються умови теореми Ляпунова про нестійкість; отже, тривіальний розв'язок нестійкий.

Такий метод побудови функції $V(x, y)$ називається *методом відокремлення змінних*.

Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість. Якщо для системи (6.10) існує диференційовна функція Ляпунова $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$, що задовольняє умови:

1) $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$ має строгий мінімум у початку координат;

2) $\frac{dV}{dx} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq 0$, причому поза скільки завгодно малій

околі початку координат, то тривіальний розв'язок $y_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (точка спокою) системи (6.10) асимптотично стійкий.

Приклад. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y, \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$$

Розв'язання. Функція $V(x, y) = x^2 + y^2$ задовольняє умови теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість:

1) $V(x, y) \geq 0$, $V(0, 0) = 0$;

2) $\frac{dV}{dt} = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \leq 0$. Поза околі початку координат $\frac{dV}{dt} \leq -\beta < 0$.

Отже, розв'язок $x \equiv y \equiv 0$ асимптотично стійкий.

Теорема Ляпунова про нестійкість. Якщо для системи рівнянь (6.10) існує функція Ляпунова $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$, така, що похідна (6.14) є знаковизначеною (сама функція $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в довільному околі початку координат не є знакосталою) із знаком, протилежним знаку $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$, то тривіальний розв'язок системи (6.10) нестійкий.

Теорема Четаєва про нестійкість. Якщо для системи (6.10) існує диференційовна функція $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$, що задовольняє у деякій замкнутій h -околі початку координат умови:

1) у скільки завгодно малій околі U початку координат існує область, у якій $V > 0$, причому $V = 0$ на частині межі цієї області, що лежить в U ;

2) в області де $V > 0$ похідна $\frac{dV}{dx} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) > 0$, причому

в області де $V \geq \alpha$ ($\alpha > 0$), похідна $\frac{dV}{dx} \geq \beta > 0$, то тривіальний розв'язок

$y_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системи (6.10) нестійкий.

Приклад. Дослідити на стійкість точку спокою $y_1 \equiv y_2 \equiv 0$ системи рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = y_2^3 + y_1^5, \\ y_2' = y_1^3 + y_2^5. \end{cases}$$

Розв'язання. Функція $V(y_1, y_2) = y_1^4 - y_2^4$ задовольняє умови теореми Четаєва про нестійкість:

1) $V(y_1, y_2) = y_1^4 - y_2^4 > 0$ при $|x| > |y|$;

2) $\frac{dV}{dx} = 4(y_1^8 - y_2^8) > 0$ при $|x| > |y|$, причому $V(y_1, y_2) \geq \alpha > 0$, $\frac{dV}{dx} \geq \beta > 0$.

Отже, точка спокою $y_1 \equiv y_2 \equiv 0$ заданої системи нестійка.

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як формулюється теорема Ляпунова про стійкість?
2. Як формулюється теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість?
3. Як формулюється теорема Ляпунова про нестійкість?
4. Як формулюється теорема Четаєва про нестійкість?
5. Дослідити на стійкість за допомогою метода функцій Ляпунова тривіальний розв'язок наступних систем:

а)
$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3, \end{cases} \quad \text{відповідь: нестійкий;}$$

б)
$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - y^3, \\ \dot{y} = x - 2y, \end{cases} \quad \text{відповідь: стійкий;}$$

в)
$$\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5, \end{cases} \quad \text{відповідь: стійкий;}$$

г)
$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = x - y^3, \end{cases} \quad \text{відповідь: асимптотично стійкий.}$$

РОЗДІЛ 7

РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

7.1. Основні поняття

Рівняння з частинними похідними першого порядку традиційно розглядаються в курсі звичайних диференціальних рівнянь з тієї причини, що їх загальний розв'язок може бути побудованим методами, розвитими в теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Означення. Співвідношення, що зв'язує невідому функцію кількох незалежних змінних, незалежні змінні та частинні похідні невідомої функції за незалежними змінними, називається рівнянням з частинними похідними.

Порядок старшої частинної похідної, що входить у склад такого рівняння, називається *порядком* рівняння. Рівняння з частинними похідними, як і звичайне диференціальне рівняння, може бути неповним, але воно має містити хоча б одну з частинних похідних невідомої функції.

У випадку функції n незалежних змінних диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку має вигляд

$$F\left(u, x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (7.1)$$

де $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – невідома функція змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Функція, що має відповідні неперервні частинні похідні і перетворює рівняння з частинними похідними у тотожність, називається *розв'язком* цього рівняння. Процес знаходження розв'язків, як і раніше називається *інтегруванням*. У результаті інтегрування рівняння з частинними похідними, як правило знаходять загальний розв'язок, що залежить від довільних функцій, а не тільки від довільних сталих, як це має місце у випадку звичайних диференціальних рівнянь.

Якщо рівняння містить невідому функцію z , що залежить тільки від двох незалежних змінних x і y , то його розв'язку $z = z(x, y)$, відповідає деяка поверхня в просторі (x, y, z) . Ця поверхня називається *інтегральною поверхнею* даного рівняння.

Наприклад, для рівняння

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (7.2)$$

функція $z = x^2 + y^2$ буде розв'язком, заданим для всіх значень x і y . З геометричної точки зору цьому розв'язку відповідає параболоїд обертання з віссю обертання Oz . Розв'язком рівняння (7.2) буде також функція

$$z = F(x^2 + y^2), \quad (7.3)$$

де F – довільна неперервно диференційовна функція. Отже, рівняння (7.2) має загальний розв'язок (7.3), що залежить від довільної функції, і якому відповідає сім'я поверхонь обертання з віссю обертання Oz .

У цьому розділі ми будемо розглядати тільки лінійні рівняння з частинними похідними першого порядку.

Означення. Диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку (7.1) називається лінійним, якщо воно містить частинні похідні невідомої функції тільки у першому степені, тобто має вигляд

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \\ + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \quad (7.4)$$

де $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – невідома функція незалежних змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, а $X_1, X_2, \dots, X_n$ і R – відомі функції своїх аргументів.

Якщо невідома функція $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не міститься в жодному з коефіцієнтів $X_1, X_2, \dots, X_n$ рівняння (7.4), а його права частина тотожно дорівнює нулю, то рівняння (7.4) називається лінійним однорідним. В протилежному випадку – лінійним неоднорідним.

Однією з найважливіших задач, які ставились у попередніх розділах для звичайних диференціальних рівнянь, була задача Коші – задача знаходження розв'язку, що задовольняє задані початкові умови. Ця задача ставиться і для рівнянь з частинними похідними.

Для рівняння (7.4) задача Коші формулюється так. Серед усіх розв'язків цього рівняння знайти такий розв'язок

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

що задовольняє початкові умови

$$u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad \text{при} \quad x_n = x_n^0,$$

де $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ – відома неперервно диференційовна функція своїх аргументів.

У випадку рівняння

$$X_1(x_1, x_2, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} = R(x_1, x_2, u)$$

задача Коші полягає в знаходженні розв'язку

$$u = f(x_1, x_2), \quad (7.5)$$

що задовольняє початкові умови

$$u = \varphi(x_2) \quad \text{при} \quad x_1 = x_1^0.$$

З геометричної точки зору мова йде про знаходження інтегральної поверхні (7.5), що проходить через задану криву $u = \varphi(x_2)$, яка лежить у площині $x_1 = x_1^0$.

Наприклад, для рівняння (7.2), розв'язку, що задовольняє початкові умови $z = y^2$ при $x = 0$, геометрично відповідає параболоїд обертання, що проходить через параболу $z = y^2$, яка лежить у площині Oyz .

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням з частинними похідними?
2. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням з частинними похідними першого порядку?
3. Що називається порядком рівняння з частинними похідними?
4. Яка поверхня називається інтегральною поверхнею?
5. Яке рівняння з частинними похідними називається лінійним?
6. Яке рівняння з частинними похідними називається лінійним однорідним?
7. Яке рівняння з частинними похідними називається лінійним неоднорідним?
8. У чому полягає задача Коші для рівняння з частинними похідними першого порядку?
9. Що з геометричної точки зору означає: розв'язати задачу Коші для рівняння з частинними похідними першого порядку?

7.2. Лінійні однорідні рівняння

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку. Розглянемо лінійне однорідне рівняння

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (7.6)$$

Припустимо, що коефіцієнти $X_1, X_2, \dots, X_n$ цього рівняння – неперервно диференційовні в деякій околі заданої точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ функції, і крім цього, не обертаються в цій точці одночасно в нуль. Тоді рівняння (7.6) має загальний розв’язок, що містить довільну функцію. Цей загальний розв’язок може бути знайденим у такий спосіб.

Запишемо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (7.7)$$

Ця система називається *системою звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі, відповідною лінійному однорідному рівнянню з частинними похідними (7.6)*.

Система (7.7) має $(n - 1)$ незалежних перших інтегралів

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (7.8)$$

які визначені в деякій околі точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Кожний з цих інтегралів є розв’язком рівняння (7.6). Кожна неперервно диференційовна функція від них

$$\psi = F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$$

також буде інтегралом системи (7.7), а значить і розв’язком рівняння (7.6).

Таким чином, рівняння (7.6) має *загальний розв’язок*

$$u = F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}).$$

У випадку рівняння з двома незалежними змінними

$$X_1(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad (7.9)$$

система (7.7) перетворюється в одне рівняння

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2)}.$$

Якщо функція $\psi(x_1, x_2)$ є першим інтегралом цього рівняння, то загальним розв’язком рівняння (7.9) буде функція

$$u = F[\psi(x_1, x_2)]$$

де F – довільна неперервно диференційовна функція.

Приклад. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Розв’язання. Складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі виду (7.7):

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2dz}{z}.$$

Інтегруючи III , матимемо $\frac{y}{x} = C_1$, $\frac{z^2}{x} = C_2$, тобто система має такі незалежні інтеграли:

$$\psi_1 = \frac{y}{x}, \quad \psi_2 = \frac{z^2}{x}.$$

Отже, загальним розв'язком заданого рівняння буде функція

$$u = F\left(\frac{y}{x}, \frac{z^2}{x}\right).$$

Розв'язок задачі Коші. Нехай необхідно знайти розв'язок

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

який задовольняє початкові умови: $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ при $x_n = x_n^0$.

Поклавши в інтегралах (7.8) системи (7.7) $x_n = x_n^0$ і позначивши одержані функції як $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}$, матимемо

[illegible]

Розв'язуючи систему (7.10) відносно $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, одержимо

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \dots, \overline{\psi}_{n-1}) , \\ x_2 = \omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \dots, \overline{\psi}_{n-1}) , \\ , \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \dots, \overline{\psi}_{n-1}) . \end{cases} \quad (7.11)$$

Підставимо в праву частину рівності $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ замість $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ функції (7.11), замінивши в них $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}$ функціями (7.10). Одержимо функцію

$$u = \phi[\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \omega_2(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})].$$

Ця функція і є розв'язком задачі Коші.

У випадку рівняння (7.9) задача Коші полягає у знаходженні розв'язку $u = f(x_1, x_2)$, який задовольняє початкові умови: $u = \varphi(x_2)$ при $x_1 = x_1^0$. Система (7.10) зводиться до одного рівняння

$$\psi(x_1^0, x_2) = \bar{\psi}, \quad (7.12)$$

звідки одержуємо $x_2 = \omega(\overline{\psi})$. Отже шуканим розв'язком буде функція

$$u = \varphi \{ \omega [\psi (x_1, x_2)] \}. \quad (7.13)$$

Приклад. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (y > 0), \quad z = 2y \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Розв'язання. Оскільки в даному рівнянні невідома функція залежить тільки від двох незалежних змінних, то система виду (7.7) перетворюється в одне рівняння

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}.$$

Звідси $x^2 - y^2 = C$, тобто $\psi = x^2 - y^2$. Отже, загальним розв'язком заданого рівняння буде функція

$$z = F(x^2 - y^2).$$

Далі, згідно з (7.12), розв'язуючи запропоновану задачу Коші, матимемо

$$-y^2 = \bar{\psi},$$

звідки

$$y = \sqrt{-\bar{\psi}}.$$

Отже, відповідно до (7.13), шуканий розв'язок матимемо вигляд

$$z = 2\sqrt{-\bar{\psi}} \quad \text{або} \quad z = \sqrt{y^2 - x^2}.$$

ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Проінтегрувати наступні рівняння, і де зазначено, знайти розв'язок, який задовольняє задані початкові умови:

1. $x \frac{\partial u}{\partial x} + yz \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = x^y \quad \text{при} \quad z = 1;$

відповідь: $u = F\left(y, \frac{x^y}{z}\right), \quad u = \frac{x^y}{z}.$

2. $\frac{\partial u}{\partial x} - (y + 2z) \frac{\partial u}{\partial y} + (3y + 4z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$

відповідь: $u = F[e^{-2x}(y + z), (3y + 2z)e^{-x}].$

3. $(x^3 + 3xy^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2y^3 \frac{\partial u}{\partial y} + 2y^2 z \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$

відповідь: $u = F\left(\frac{z}{y}, y + \frac{y^3}{x^2}\right).$

4. $(z - y)^2 \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = 2y(y - z) \quad \text{при} \quad x = 0;$

відповідь: $u = F[y^2 - z^2, 2x + (z - y)^2], \quad u = 2[y(y - z) + x].$

7.3. Лінійні неоднорідні рівняння

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння з частинними похідними першого порядку. Інтегрування лінійного неоднорідного рівняння (7.4) у припущенні, що функції $X_1, X_2, \dots, X_n$ і R неперервно диференційовні в деякій околі заданої точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ і при цьому $X_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, u^0) \neq 0$, зводиться до інтегрування наступної відповідної йому системи звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{du}{R(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (7.14)$$

Якщо функції

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \quad (7.15)$$

є незалежні перші інтеграли системи (7.14), то співвідношення

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 0,$$

де $\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ – довільна неперервно диференційовна функція, називається *загальним інтегралом* рівняння (7.4). Розв'язуючи його відносно функції u , одержимо *загальний розв'язок*.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (x > 0).$$

Розв'язання. Дане рівняння є неоднорідним, оскільки, хоча права частина тотожно дорівнює нулю, невідома функція z міститься в одному з коефіцієнтів рівняння.

Згідно з правилом побудови загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння з частинними похідними першого порядку, необхідно скласти та проінтегрувати систему звичайних диференціальних рівнянь виду (7.14). Матимемо

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-z} = \frac{dz}{0}.$$

Після її інтегрування, одержимо

$$z = C_1, \quad \ln|x| = -\frac{y}{C_1} + C_2, \quad \ln|x| + \frac{y}{z} = C_2.$$

Звідси

$$\psi_1 = z, \quad \psi_2 = \ln|x| + \frac{y}{z}.$$

Отже, загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд

$$\Phi\left(z, \ln|x| + \frac{y}{z}\right) = 0.$$

Розв'язок задачі Коші. Нехай необхідно знайти розв'язок

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

Поклавши в інтегралах (7.15) системи (7.14) $x_n = x_n^0$ і позначивши одержані функції як $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}$, матимемо

[illegible]

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \omega_1(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n) , \\ x_2 = \omega_2(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n) , \\ , \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n) , \\ u = \omega(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n) . \end{array} \right. \quad (7.17)$$
$$\omega(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \phi[\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \omega_2(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)].$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + (y + x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

$$z = y - 4 \quad \text{при} \quad x = 2.$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2} = \frac{dz}{z}.$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2},$$
$$y = x(C_1 + x), \quad \frac{y - x^2}{x} = C_1, \quad \psi_1 = \frac{y - x^2}{x}.$$

211

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$$

матимемо

$$\frac{z}{x} = C_2, \quad \psi_2 = \frac{z}{x}.$$

Тоді загальним інтегралом даного рівняння буде функція

$$\Phi\left(\frac{y-x^2}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$$

Знайдемо розв'язок, який задовольняє задані початкові умови. Поклавши в інтегралах ψ_1 і ψ_2 $x = 2$, матимемо

$$\frac{y-4}{2} = \bar{\psi}_1, \quad \frac{z}{2} = \bar{\psi}_2,$$

звідки

$$y = 2\bar{\psi}_1 + 4, \quad z = 2\bar{\psi}_2.$$

Підставивши ці вирази y і z у формулу $z = y - 4$, заміняючи $\bar{\psi}_1$ і $\bar{\psi}_2$ на ψ_1 і ψ_2 , одержимо

$$\psi_1 = \psi_2, \quad \frac{z}{x} = \frac{y-x^2}{x}.$$

Таким чином, остаточно, матимемо такий розв'язок задачі Коші:

$$z = y - x^2.$$

ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Проінтегрувати наступні рівняння, і де зазначено, знайти розв'язок, який задовольняє задані початкові умови:

$$1. \quad \frac{\partial z}{\partial x} + (2y - z) \frac{\partial z}{\partial y} = y + 2z;$$

$$\text{відповідь: } \Phi\left(e^{-2x}(z \sin x + y \cos x), e^{-2x}(y \sin x - z \cos x)\right) = 0.$$

$$2. \quad yz \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z = x^2 \quad \text{при} \quad y = 1;$$

$$\text{відповідь: } \Phi\left(z, x^2 - y^2 z\right) = 0, \quad z = \frac{x^2}{y^2}.$$

$$3. \quad (z - y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x - z) \frac{\partial z}{\partial y} + x - y = 0;$$

$$\text{відповідь: } \Phi\left(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2\right) = 0.$$

$$4. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u, \quad u = \frac{y+z}{2} \quad \text{при} \quad x = 2;$$

відповідь: $\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{u}{x}\right) = 0, \quad u = \frac{y+z}{2}.$

Розділ 8

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Типи диференціальних рівнянь для яких можна одержати розв'язок в квадратурах або в елементарних функціях досить обмежені. Тому виникає необхідність у побудові наближених розв'язків диференціальних рівнянь. Методи їх побудови з наперед заданою точністю називають наближеними методами інтегрування диференціальних рівнянь. Достоїнства наближених методів оцінюються за точністю результатів (абсолютною і відносною похибками), що вони дають і за простотою обчислень.

Якщо a – точне значення деякої величини, а a^* – відоме наближення до нього, то *абсолютною похибкою* наближеного значення a^* називають деяку величину $\Delta(a^*)$, про яку відомо, що

$$|a^* - a| \leq \Delta(a^*).$$

Відносною похибкою наближеного значення називають деяку величину $\delta(a^*)$, про яку відомо, що

$$\left| \frac{a^* - a}{a^*} \right| \leq \delta(a^*).$$

Відносну похибку часто виражають у відсотках.

Якщо в постановці задачі необхідно знайти розв'язок з похибкою 10^{-2} , найчастіше не мається на увазі обов'язковість цієї вимоги. Передбачається лише, що похибка має такий порядок.

Теорія наближених методів добре розвинена і є могутнім апаратом дослідження різноманітних процесів, що описуються диференціальними рівняннями, які не інтегруються в квадратурах. Вона розвивається в основному в двох напрямках: теорія аналітичних наближених методів інтегрування та теорія чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь.

Аналітичні методи – це побудова наближених розв'язків диференціальних рівнянь із заданим ступенем точності у вигляді аналітичних виразів, тобто формул. Сюди відносяться асимптотичні методи, метод послідовних наближень, метод степеневих рядів, рядів Фур'є та ін.

Чисельні методи інтегрування диференціальних рівнянь є основним інструментом доведення розв'язку до числа. Серед них слід виділити Метод Ейлера, метод Адамса, метод Рунге-Кутта метод скінченних різниць.

Аналітичні та чисельні методи наближеного розв'язування диференціальних рівнянь органічно зв'язані, вони взаємно збагачують і доповнюють один одного. Цей взаємозв'язок дав розвиток новому напрямку у теорії наближених методів – теорія чисельно-аналітичних методів.

8.1. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

Розглянемо спочатку диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y) \quad (8.1)$$

з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0. \quad (8.2)$$

Нехай права частина рівняння (8.1) є аналітична функція в початковій точці (x_0, y_0) , тобто у деякій околі цієї точки може бути розвинута в степеневий ряд. Тоді існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння (8.1), який задовольняє початкову умову (8.2), причому цей розв'язок є аналітичною функцією в точці x_0 і може бути представлений у вигляді ряду Тейлора

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad (|x - x_0| < h), \quad (8.3)$$

де $a_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$); h – деяка константа, що характеризує радіус збіжності степеневого ряду.

Коефіцієнт a_0 розвинення (8.3) визначається безпосередньо з початкової умови (8.2), тобто

$$a_0 = y(x_0) = y_0.$$

Наступний коефіцієнт a_1 дістанемо з самого диференціального рівняння (8.1). Отже

$$a_1 = y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Решта коефіцієнтів a_k ($k > 1$) ряду (8.3), можуть бути знайдені крок за кроком шляхом послідовного диференціювання даного диференціального рівняння (8.1). Наприклад, диференціюючи по x обидві частини рівняння (8.1), матимемо

$$y'' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)y'.$$

Звідси

$$a_2 = \frac{1}{2} y''(x_0) = \frac{1}{2} [f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)y'(x_0)].$$

Далі одержимо

$$a_3 = \frac{1}{6} y'''(x_0) = \\ = \frac{1}{6} [f''_{xx}(x_0, y_0) + 2f''_{xy}(x_0, y_0)y'(x_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y'(x_0))^2 + f'_y(x_0, y_0)y''(x_0)].$$

Аналогічно визначаються коефіцієнти a_4 , a_5 та ін. Таким чином побудовано аналітичний розв'язок (8.3) рівняння (8.1).

У деяких випадках безпосереднє обчислення коефіцієнтів ряду (8.3) викликає значні труднощі. Тому для їх знаходження застосовують метод невизначених коефіцієнтів, який особливо зручний для лінійних рівнянь. Суть його полягає в тому, що ряд (8.3) безпосередньо підставляють у диференціальне рівняння (8.1) і прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях змінної x . В результаті дістають систему рівнянь відносно a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), з якої і визначають їх.

Питання про оцінку радіусу збіжності h степеневому ряду (8.3) тут ми розглядати не будемо. Проте, якщо диференціальне рівняння лінійне, тобто має вигляд $y' = Q(x) + P(x)y$ і функції $P(x)$, $Q(x)$ припускають розвинення в степеневі ряди в початковій точці x_0 з загальним радіусом збіжності R , то можна покласти $h = R$.

Приклад. Знайти чотири перших члени розвинення в ряд Тейлора розв'язку $y = y(x)$ диференціального рівняння

$$y' = \frac{y}{x + y}, \quad (8.4)$$

що задовольняє початкову умову $y(1) = 2$.

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок рівняння (8.4) у вигляді степеневому ряду Тейлора

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \quad (8.5)$$

В нашому випадку $x_0 = 1$. Тоді безпосередньо з початкової умови та рівняння (8.4), матимемо

$$y(x_0) = y(1) = 2, \quad y'(x_0) = y'(1) = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}.$$

Диференціюючи рівняння (8.4), одержимо

$$y'' = \frac{y'(x+y) - y(1+y')}{(x+y)^2} = \frac{xy' - y}{(x+y)^2}. \quad (8.6)$$

Звідси

$$y''(x_0) = y''(1) = \frac{1 \cdot \frac{2}{3} - 2}{(1+2)^2} = -\frac{4}{27}.$$

Диференціюючи співвідношення (8.6) ще раз, дістанемо

$$y''' = \frac{xy''(x+y) - 2(1+y')(xy' - y)}{(x+y)^3}.$$

Тоді

$$y'''(x_0) = y'''(1) = \frac{-\frac{4}{27} \cdot 3 + 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3}}{27} = \frac{4}{27}.$$

Підставивши одержані коефіцієнти степеневому ряду в (8.5), остаточно матимемо наближений розв'язок даної задачі Коші у вигляді

$$y(x) = 2 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{27}(x-1)^2 + \frac{2}{81}(x-1)^3 + \dots$$

Приклад. За допомогою степеневих рядів знайти наближений розв'язок (чотири перших члени ряду) задачі Коші:

$$y' = 3y + x^2, \quad y(0) = 5. \quad (8.7)$$

Одержаний розв'язок порівняти з точним розв'язком (знайти самостійно) даного рівняння. Дослідити вплив кількості членів степеневому ряду на точність наближеного розв'язку.

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок рівняння (8.7) у вигляді степеневому ряду Маклорена (оскільки $x_0 = 0$)

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots \quad (8.8)$$

З початкової умови $a_0 = y(0) = 5$. Для знаходження коефіцієнтів, $a_1 = y'(0)$, $a_2 = \frac{y''(0)}{2!}$, $a_3 = \frac{y'''(0)}{3!}$ степеневому ряду (8.8) застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. Для цього (8.8) безпосередньо підставимо у дане диференціальне рівняння. Матимемо

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots = 15 + 3a_1x + 3a_2x^2 + \dots x^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної x . В результаті дістанемо

$$a_1 = 15, \quad a_2 = \frac{45}{2}, \quad a_3 = \frac{137}{6}.$$

Тоді шуканий наближений розв'язок запишемо у вигляді

$$y(x) = 5 + 15x + \frac{45}{2}x^2 + \frac{137}{6}x^3 + \dots$$

Точний розв'язок задачі Коші (8.7) має вигляд

$$y(x) = \frac{-2 + 137e^{3x} - 6x - 9x^2}{27}.$$

Результати порівняння точного і наближеного розв'язків, а також дослідження впливу кількості членів степеневому ряду на точність наближеного розв'язку наведені у таблиці 8.1 і на рис. 8.1.

Таблиця 8.1

Порівняльний аналіз точного і наближеного розв'язків задачі Коші (8.7)

x	y(x) точний розв'язок	y1(x) наближений розв'язок (чотири члени ряду)	абсолютна похибка	відносна похибка	y2(x) наближений розв'язок (три члени ряду)	абсолютна похибка	відносна похибка
0,00	5	5	0,000	0,00%	5	0,000	0,00%
0,05	5,8092	5,8091	0,000	0,00%	5,8063	0,003	0,05%
0,10	6,7497	6,7478	0,002	0,03%	6,725	0,025	0,37%
0,15	7,8428	7,8333	0,010	0,12%	7,7562	0,087	1,12%
0,20	9,1137	9,0827	0,031	0,34%	8,9	0,214	2,40%
0,25	10,5914	10,513	0,078	0,75%	10,1563	0,435	4,28%
0,30	12,3095	12,1415	0,168	1,38%	11,525	0,785	6,81%
0,35	14,3072	13,9852	0,322	2,30%	13,0063	1,301	10,00%
0,40	16,6302	16,0613	0,569	3,54%	14,6	2,030	13,91%
0,45	19,3313	18,3869	0,944	5,14%	16,3062	3,025	18,55%
0,50	22,4719	20,9792	1,493	7,12%	18,125	4,347	23,98%

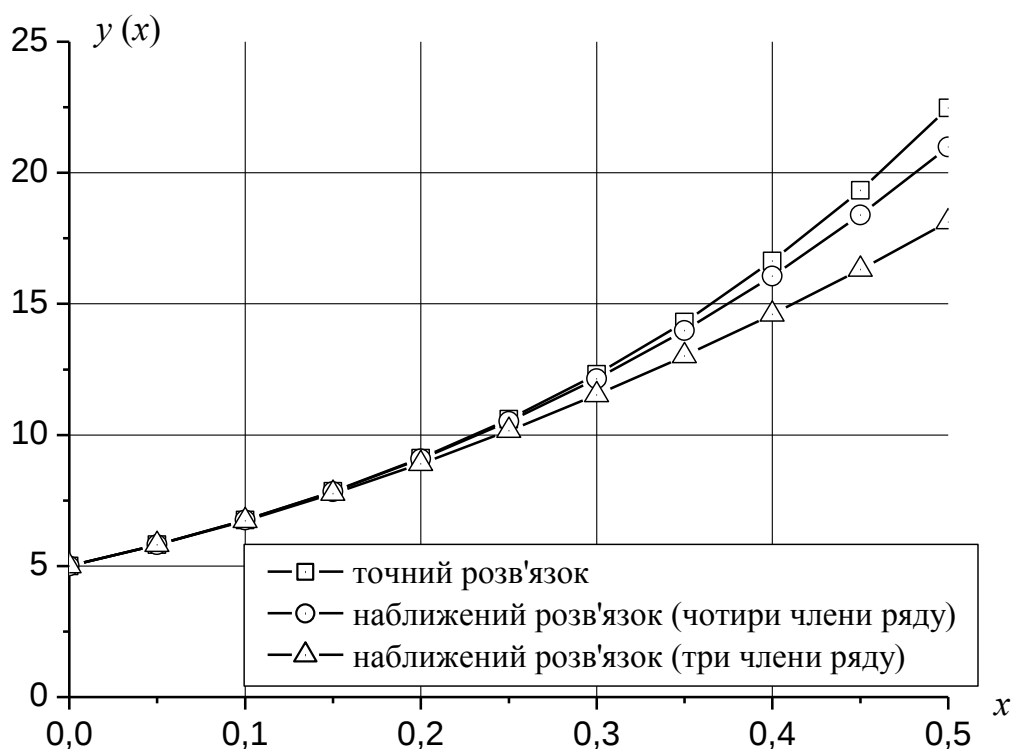


Рис. 8.1

Викладений вище метод інтегрування диференціальних рівнянь досить легко узагальнюється на випадок диференціального рівняння n -ого порядку. Нехай треба знайти розв'язок такої задачі Коші:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (8.9)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (8.10)$$

де $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – відомі числа.

Припускаючи, що функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ аналітична у початковій точці $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$, шукатимемо розв'язок задачі Коші (8.9), (8.10) у вигляді ряду Тейлора (Маклорена, якщо $x_0 = 0$)

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_0^{(k)}}{k!} (x - x_0)^k. \quad (8.11)$$

У співвідношенні (8.11) $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ відомі з початкових умов (8.10). Із рівняння (8.9) дістанемо

$$y_0^{(n)} = f(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}).$$

Диференціюючи послідовно рівняння (8.9) по змінній x згідно правила диференціювання складної функції і замінюючи $x = x_0$, визначимо решту невідомих $y_0^{(k)}$ ($k = n + 1, n + 2, \dots$) через перші n з них. Таким чином буде побудовано ряд (8.11).

Приклад. За допомогою степеневих рядів знайти наближений розв'язок (чотири перших члени ряду) задачі Коші:

$$y'' + \frac{y'}{x} = x, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2. \quad (8.12)$$

Одержаний розв'язок порівняти з точним розв'язком (знайти самостійно) даного рівняння. Дослідити вплив кількості членів степеневого ряду на точність наближеного розв'язку.

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок задачі (8.12) у вигляді степеневого ряду Тейлора

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \quad (8.13)$$

З початкових умов $y_0 = y(x_0) = y(1) = 1$, $y'_0 = y'(x_0) = y'(1) = 2$. Безпосередньо із заданого рівняння, матимемо

$$y'' = x - \frac{y'}{x}, \quad y''_0 = y''(x_0) = y''(1) = 1 - \frac{2}{1} = -1.$$

Диференціюючи задане рівняння по x , одержимо

$$y''' = 1 - \frac{y''x - y'}{x^2}.$$

Звідси

$$y'''_0 = y'''(x_0) = y'''(1) = 1 - \frac{-1 \cdot 1 - 2}{1} = 4.$$

Тоді шуканий наближений розв'язок (8.13) запишемо у вигляді

$$y(x) = -1 + 2x - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{2}{3}(x-1)^3 + \dots$$

Точний розв'язок задачі Коші (8.12) має вигляд

$$y(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{5}{3} \ln x + \frac{8}{9}.$$

Результати порівняння точного і наближеного розв'язків, а також дослідження впливу кількості членів степеневому ряду на точність наближеного розв'язку наведені на рис. 8.2.

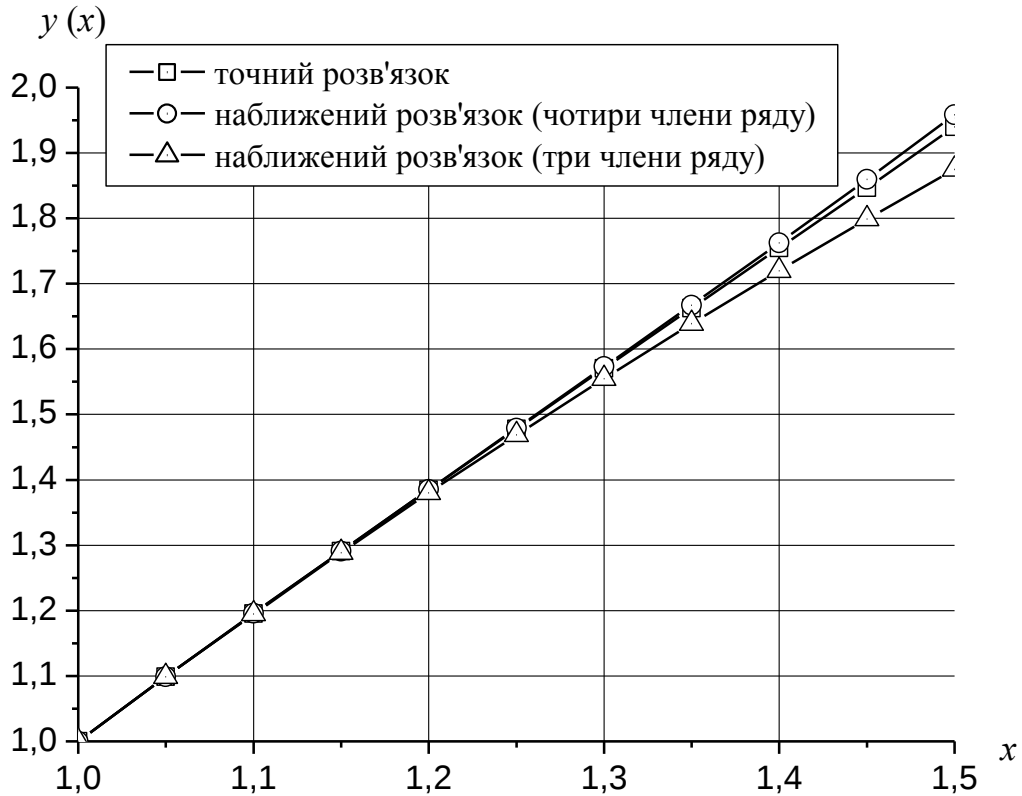


Рис. 8.2

Метод степеневих рядів застосовується також до нормальних систем диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

з початковими умовами $y_i(x_0) = y_{i0}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Якщо функції $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) аналітичні то компоненти розв'язку $y = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ системи можна шукати у вигляді ряду Тейлора

$$y_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_{i0}^{(k)}}{k!} (x - x_0)^k \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Коефіцієнти цих рядів можуть бути знайдені з урахуванням початкових умов послідовним диференціюванням рівнянь даної системи.

Приклад. Для системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases} \quad (8.14)$$

побудувати розв'язок у формі степеневому ряду (чотири перших члени), що задовольняє початкові умови $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Одержаний розв'язок порівняти з точним розв'язком (знайти самостійно) даного рівняння.

Розв'язання. Оскільки $t_0 = 0$, то розв'язок системи (8.14) шукатимемо у вигляді розвинення у ряд Маклорена

$$x(t) = x(0) + \frac{\dot{x}(0)}{1!}t + \frac{\ddot{x}(0)}{2!}t^2 + \frac{\dddot{x}(0)}{3!}t^3 + \dots, \quad (8.15)$$

$$y(t) = y(0) + \frac{\dot{y}(0)}{1!}t + \frac{\ddot{y}(0)}{2!}t^2 + \frac{\dddot{y}(0)}{3!}t^3 + \dots. \quad (8.16)$$

З початкових умов, матимемо $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Поклавши $t = 0$ у системі (8.14), дістанемо $\dot{x}(0) = -2$, $\dot{y}(0) = -1$. Диференціюючи по t систему (8.14), одержимо

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\dot{x} - 3\dot{y}, \\ \ddot{y} = -\dot{x}. \end{cases} \quad (8.17)$$

Звідси $\ddot{x}(0) = 7$, $\ddot{y}(0) = 2$. Диференціюючи систему (8.17), матимемо

$$\begin{cases} \dddot{x} = -2\ddot{x} - 3\ddot{y}, \\ \dddot{y} = -\ddot{x}. \end{cases}$$

Отже, $\ddot{x}(0) = -20$, $\ddot{y}(0) = -7$.

Використовуючи формули (8.15) і (8.16), остаточно, одержимо

$$\begin{cases} x(t) = 1 - 2t + \frac{7}{2}t^2 - \frac{10}{3}t^3 + \dots, \\ y(t) = -t + t^2 - \frac{7}{6}t^3 + \dots. \end{cases}$$

Точний розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x(t) = \frac{e^{-3t}}{4} (3 + e^{4t}), \\ y(t) = \frac{-e^{-3t}}{4} (-1 + e^{4t}). \end{cases}$$

Результати порівняння точного і наближеного розв'язків, а також дослідження впливу кількості членів степеневому ряду на точність наближеного розв'язку наведені у таблиці 8.2.

Зауваження. У даному розділі в більшості прикладів, що розглядаються, навмисно вибрані такі диференціальні рівняння та їх системи, які мають відносно простий точний розв'язок, щоб дати можливість порівняння наближеного і точного розв'язків.

Таблиця 8.2

Порівняльний аналіз точного і наближеного розв'язків задачі Коші (8.14)

t	x(t) точний розв'язок	x1(t) наближений розв'язок	абсолютна похибка	відносна похибка	y(t) точний розв'язок	y1(t) наближений розв'язок	абсолютна похибка	відносна похибка
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	0,00%	0,0000	0,0000	0,0000	0,00%
0,05	0,9083	0,9083	0,0000	0,00%	-0,0476	-0,0476	0,0000	0,00%
0,10	0,8319	0,8317	0,0002	0,02%	-0,0911	-0,0912	0,0001	0,11%
0,15	0,7687	0,7675	0,0012	0,16%	-0,1311	-0,1314	0,0003	0,23%
0,20	0,7170	0,7133	0,0037	0,52%	-0,1681	-0,1693	0,0012	0,71%
0,25	0,6753	0,6667	0,0086	1,29%	-0,2029	-0,2057	0,0028	1,36%
0,30	0,6424	0,6250	0,0174	2,78%	-0,2358	-0,2415	0,0057	2,36%
0,35	0,6172	0,5858	0,0314	5,36%	-0,2673	-0,2775	0,0102	3,68%
0,40	0,5989	0,5467	0,0522	9,55%	-0,2977	-0,3147	0,0170	5,40%
0,45	0,5865	0,5050	0,0815	16,14%	-0,3273	-0,3538	0,0265	7,49%
0,50	0,5795	0,4583	0,1212	26,45%	-0,3564	-0,3958	0,0394	9,95%

Аналіз одержаних результатів показує, що при застосуванні степеневих рядів до розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем точність результатів зростає зі збільшенням кількості членів ряду і зменшується з віддаленням від початкової точки.

Метод розвинення розв'язку диференціального рівняння у степеневі ряди часто використовується як елемент найпрактичніших методів наближеного інтегрування диференціальних рівнянь. Наприклад, для деяких чисельних методів інтегрування диференціальних рівнянь необхідно визначити значення шуканих функцій у кількох точках. Ці значення при дотриманні відомих умов гладкості даного рівняння можуть бути з високою точністю обчислені за допомогою степеневих рядів.

ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Знайти чотири перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

а) $(1 + y^2) dx + (1 + x^2) dy = 0$, $y(1) = 0$;

б) $xy' = 4(y + \sqrt{y})$, $y(2) = 1$;

в) $yy'' = 2xy'^2$, $y(2) = 2$, $y'(2) = \frac{1}{2}$;

г) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$

Одержаний наближений розв'язок порівняти з точним розв'язком.

2. Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

а) $y' = x^2 + y^2 - e^x$, $y(0) = 0$;

б) $y' = x^2 + y^2$, $y(1) = 1$;

в) $y'' = xy' - y + e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; г) $y'' = x^2 y$, $y(0) = y'(0) = 0$;

д) $\begin{cases} \dot{x} = x \cos t - y \sin t, \\ \dot{y} = x \sin t + y \cos t, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0.$

2. Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

- а) $y' = x^2 + y^2 - e^x$, $y(0) = 0$; б) $y' = x^2 + y^2$, $y(1) = 1$;
 в) $y'' = xy' - y + e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; г) $y'' = x^2 y$, $y(0) = y'(0) = 0$;
 д) $\begin{cases} \dot{x} = x \cos t - y \sin t, \\ \dot{y} = x \sin t + y \cos t, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0.$

8.2. Метод послідовних наближень

Суть цього методу для розв'язування задачі Коші (8.1), (8.2), а також оцінка похибки докладно наведені у першому розділі даного посібника при доведенні теореми про існування та єдиність (п. 1.6) розв'язку задачі Коші. Тому зараз лише нагадаємо, що задача Коші (8.1), (8.2) еквівалентна дослідженню розв'язку інтегрального рівняння

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (8.18)$$

Наближений розв'язок інтегрального рівняння (8.18) знаходиться за рекурентною формулою

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (8.19)$$

де n – номер наближення.

Відомо (п. 1.6), що при виконанні умови Ліпшиця послідовні наближення $y_n = y_n(x)$ на деякому достатньо малому відрізку рівномірно збігаються, причому гранична функція

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) \quad (8.20)$$

задовольняє диференціальне рівняння (8.1) і початкову умову (8.2).

При застосуванні методу послідовних наближень за початкове (нульове) наближення y_0 у (8.19) можна взяти будь-яку відому функцію близьку до точного розв'язку. Як правило за нульове наближення беруть початкове значення y_0 (8.2) шуканої функції. Іноді зручно за нульове наближення взяти скінченний відрізок ряду Тейлора шуканого розв'язку.

Відзначимо, що при застосуванні методу послідовних наближень аналітичність правої частини диференціального рівняння (8.1) не обов'язкова, тому цей метод можна використовувати і в тих випадках, коли розвинення розв'язку диференціального рівняння в степеневий ряд не можливо.

Приклад. Методом послідовних наближень знайти наближений розв'язок диференціального рівняння $y' = x - y$, що задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Розв'язання. За нульове наближення виберемо $y_0(x) = y(0) = 1$. Тоді згідно (8.19), матимемо

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (x-1) dx = 1 - x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(x - 1 + x - \frac{x^2}{2} \right) dx = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6},$$

$$y_3(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24},$$

$$y_4(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120}$$

і т. ін. Отже можна записати

$$y_n(x) = 1 - x + 2 \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right] + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Тоді з (8.20), остаточно одержимо наближений розв'язок у вигляді

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = 2e^{-x} - 1 + x.$$

Останній вираз співпадає з точним розв'язком (знайти самостійно), а кожне з послідовних наближень $y_n(x)$ дає наближене значення шуканого розв'язку.

Приклад. Знайти перші п'ять послідовні наближення розв'язку задачі Коші:

$$y' = 3y + x^2, \quad y(0) = 5. \quad (8.21)$$

Одержані наближення порівняти з точним розв'язком (знайти самостійно) даної задачі.

Розв'язання. За нульове наближення виберемо $y_0(x) = y(0) = 5$. Тоді згідно (8.19), матимемо

$$y_1(x) = 5 + \int_0^x (15 + x^2) dx = 5 + 15x + \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = 5 + \int_0^x (15 + 45x + x^3 + x^2) dx = 5 + 15x + \frac{45}{2} x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4},$$

$$y_3(x) = 5 + 15x + \frac{45}{2} x^2 + \frac{137}{6} x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{3}{20} x^5,$$

$$y_4(x) = 5 + 15x + \frac{45}{2} x^2 + \frac{137}{6} x^3 + \frac{137}{8} x^4 + \frac{3}{20} x^5 + \frac{3}{40} x^6$$

$$y_5(x) = 5 + 15x + \frac{45}{2} x^2 + \frac{137}{6} x^3 + \frac{137}{8} x^4 + \frac{411}{40} x^5 + \frac{3}{40} x^6 + \frac{9}{280} x^7.$$

Для наочності результатів представимо їх у таблиці 8.3 та у вигляді графіків на рис. 8.3. При цьому слід відзначити, що чим більший номер наближення тим менша похибка при заміні точного розв'язку його n -м наближенням.

Таблиця 8.3

Порівняльний аналіз точного і наближених розв'язків задачі Коші (8.21)

x	y(x) точний розв'язок	y3(x) третє наближення	абсолютна похибка	відносна похибка	y5(x) п'яте наближення	абсолютна похибка	відносна похибка
0,00	5	5	0,0000	0,00%	5	0,0000	0,00%
0,05	5,8092	5,8091	0,0001	0,00%	5,8092	0,0000	0,00%
0,10	6,7497	6,7479	0,0018	0,03%	6,7496	0,0001	0,00%
0,15	7,8428	7,8335	0,0093	0,12%	7,8428	0,0000	0,00%
0,20	9,1137	9,0831	0,0306	0,34%	9,1134	0,0003	0,00%
0,25	10,5914	10,5141	0,0773	0,74%	10,59	0,0014	0,01%
0,30	12,3095	12,1439	0,1656	1,36%	12,3052	0,0043	0,03%
0,35	14,3072	13,9898	0,3174	2,27%	14,2963	0,0109	0,08%
0,40	16,6302	16,0693	0,5609	3,49%	16,6053	0,0249	0,15%
0,45	19,3313	18,4	0,9313	5,06%	19,2795	0,0518	0,27%
0,50	22,4719	20,9995	1,4724	7,01%	22,372	0,0999	0,45%

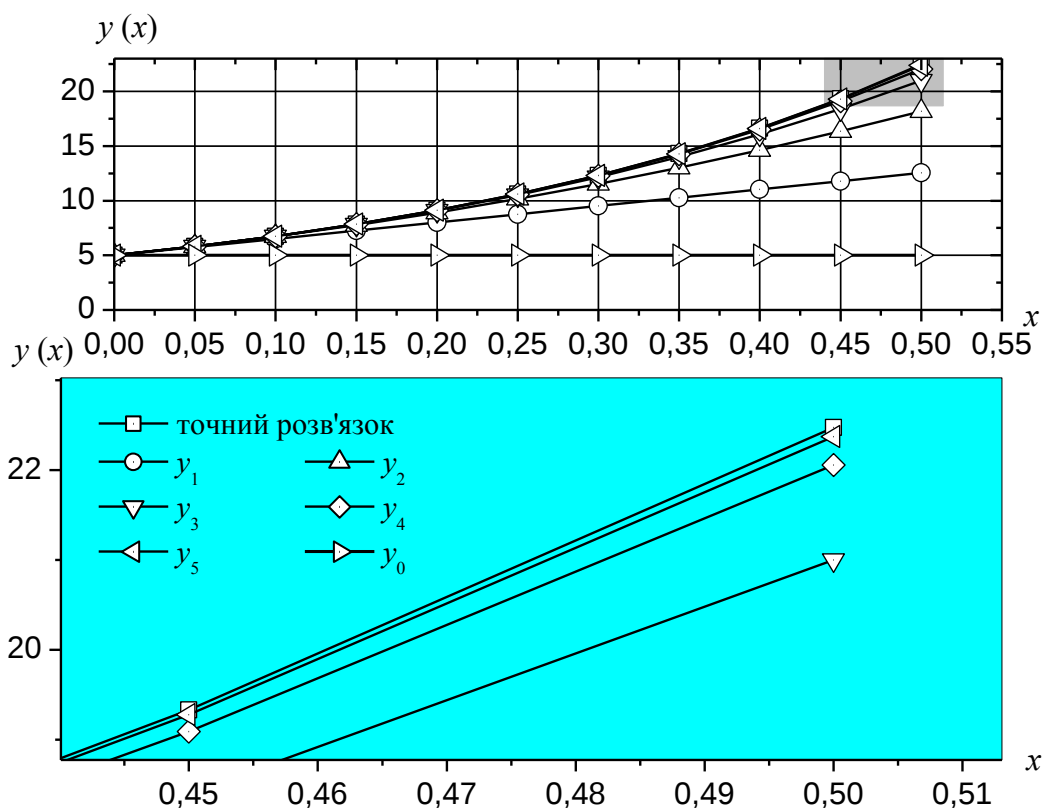


Рис. 8.3

Метод послідовних наближень можна застосовувати і до розв'язування задачі Коші для лінійного диференціального рівняння n -го порядку. Для цього цій задачі необхідно поставити у відповідність інтегральне рівняння.

Задача Коші для лінійного диференціального рівняння n -го порядку полягає в тім, щоб серед усіх розв'язків диференціального рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (8.22)$$

де $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) та $f(x)$ – відомі неперервні на деякому розглядуваному проміжку функції, знайти такий розв'язок, що задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (8.23)$$

Покажемо, як звести задачу Коші (8.22), (8.23) до інтегрального рівняння. Нехай існує розв'язок задачі (8.22), (8.23). Покладемо

$$y^{(n)}(x) = u(x).$$

Тоді

$$y^{(n-1)}(x) = y_0^{(n-1)} + \int_{x_0}^x u(t) dt,$$

$$y^{(n-2)}(x) = y_0^{(n-2)} + y_0^{(n-1)}(x - x_0) + \int_{x_0}^x \frac{x-t}{1!} u(t) dt,$$

$$y^{(n-3)}(x) = y_0^{(n-3)} + y_0^{(n-2)}(x - x_0) + y_0^{(n-1)} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^2}{2!} u(t) dt,$$

.....

$$y^{(n-m)}(x) = y_0^{(n-m)} + y_0^{(n-m+1)}(x - x_0) + \dots +$$

$$+ y_0^{(n-1)} \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} u(t) dt,$$

.....

$$y(x) = y_0 + y'_0 \frac{x - x_0}{1!} + y_0'' \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots +$$

$$+ y_0^{(n-1)} \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t) dt. \quad (8.24)$$

Наведемо короткий запис цих виразів:

$$y^{(n-m)}(x) = \sum_{r=1}^m y_0^{n-r} \frac{(x-x_0)^{m-r}}{(m-r)!} + \frac{1}{(m-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{m-1} u(t) dt. \quad (8.25)$$

Тоді рівняння (8.22) матиме вигляд

$$y^{(n)} + \sum_{m=1}^n a_m(x) y^{(n-m)} = f(x).$$

Підставимо сюди знайдені вирази. Дістанемо

$$u(x) + \int_{x_0}^x \sum_{m=1}^n a_m(x) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} u(t) dt + \sum_{m=1}^n \sum_{r=1}^m y_0^{(n-r)} \frac{(x-x_0)^{m-r}}{(m-r)!} = f(x).$$

Введемо позначення

$$K(x, t) = - \sum_{m=1}^n a_m(x) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!},$$

$$z(x) = f(x) - \sum_{m=1}^n \sum_{r=1}^m y_0^{(n-r)} \frac{(x-x_0)^{m-r}}{(m-r)!}.$$

Отже, для $u(x)$ маємо інтегральне рівняння

$$u(x) = z(x) + \int_{x_0}^x K(x, t) u(t) dt. \quad (8.26)$$

Нехай, навпаки, інтегральне рівняння (8.26) має розв'язок $u(x)$. Функція (8.24) є розв'язком задачі Коші (8.22), (8.23). Дійсно, початкові умови (8.23) задовольняються, диференціювання виразу (8.24) дає співвідношення (8.25). Підставляючи їх у рівняння (8.22), дістаємо тотожність (рівність (8.26) є при цьому тотожністю).

Таким чином, між розв'язком задачі Коші (8.22), (8.23) і розв'язком інтегрального рівняння (8.26) має місце взаємно однозначна відповідність, яка задається формулою (8.24).

Аналогічно попередньому методом Пекара можна довести, що рівняння (8.26) має єдиний розв'язок, отже, і задача Коші має теж єдиний розв'язок.

Приклад. Перейти від задачі Коші

$$y'' + (1+x^2)y = \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

до інтегрального рівняння.

Розв'язання. Нехай $y'' = u(x)$. Тоді

$$y' = 2 + \int_0^x u(t) dt,$$

$$y = 2x + \int_0^x \int_0^x u(t) dt dt ,$$

або

$$y(x) = 2x + \int_0^x \frac{x-t}{1!} u(t) dt .$$

Підставляючи значення $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ в задане рівняння, матимемо

$$u(x) = \cos x - 2x(1+x^2) - \int_0^x (1+x^2)(x-t)u(t) dt ,$$

а це і є інтегральне рівняння.

Досить легко поширити метод послідовних наближень для нормальної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y), \quad (8.27)$$

де

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad F(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Нехай початкові умови також записані у векторній формі

$$Y(x_0) = Y_0.$$

Тоді записуючи векторне рівняння (8.27) в інтегральній формі, матимемо

$$Y = Y_0 + \int_{x_0}^x F(x, Y) dx, \quad (8.28)$$

де

$$\int_{x_0}^x F(x, Y) dx = \begin{pmatrix} \int_{x_0}^x f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx \\ \int_{x_0}^x f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx \\ \dots \\ \int_{x_0}^x f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx \end{pmatrix}.$$

Послідовні наближення $Y^{(p)}$ ($p = 1, 2, \dots$) визначаються за формулою

$$Y^{(p)} = Y_0 + \int_{x_0}^x F(x, Y^{(p-1)}) dx, \quad (8.29)$$

причому найчастіше покладають

$$Y^{(0)} \equiv Y_0.$$

Метод послідовних наближень можна аналогічно використовувати до розв'язування диференціального рівняння n -го порядку, якщо його записати у вигляді системи.

Приклад. За допомогою метода послідовних наближень знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 5y_2; \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1.$$

Розв'язання. Дана задача Коші, згідно (8.28), еквівалентна системі інтегральних рівнянь (за нульові наближення виберемо $y_1^0 = 1, y_2^0 = -1$)

$$\begin{cases} y_1 = 1 + \int_0^x (5y_1 + 4y_2) dx, \\ y_2 = -1 + \int_0^x (4y_1 + 5y_2) dx. \end{cases}$$

Тоді за формулою (8.29), маємо

$$\begin{cases} y_1^{(1)} = 1 + \int_0^x 1 dx = 1 + x; \\ y_2^{(1)} = -1 + \int_0^x (-1) dx = -(1 + x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1^{(2)} = 1 + \int_0^x (5(1 + x) - 4(1 + x)) dx = 1 + x + \frac{x^2}{2!}; \\ y_2^{(2)} = -1 + \int_0^x (4(1 + x) - 5(1 + x)) dx = -\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1^{(p)} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}; \\ y_2^{(p)} = -\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right), \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} y_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_1^{(p)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = e^x; \\ y_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_2^{(p)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = -e^x. \end{cases}$$

Отже, шуканим розв'язком заданої задачі Коші є сукупність функцій

$$\begin{cases} y_1 = e^x; \\ y_2 = -e^x. \end{cases}$$

Цей розв'язок єдиний за теоремою Коші існування і єдиності розв'язку.

ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Знайти перші три послідовні наближення таких задач Коші:

а) $y' - 2y = -2x^2 - 3,$ $y(0) = 2;$

б) $xy' = 2x - y,$ $y(1) = 2;$

в) $y' = x^2 - y^2,$ $y(-1) = 0;$

г) $\begin{cases} \dot{x} + 7x = y + 5, \\ \dot{y} + 2x + 5y = -37t, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y_1' = -y_2, \\ y_2' = -y_1, \end{cases}$ $\begin{cases} y_1(0) = 2, \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$

2. Звести до інтегрального рівняння такі задачі Коші:

а) $y' - y = e^x,$ $y(0) = 1;$

б) $y'' + y = \cos x,$ $y(0) = y'(0) = 0;$

в) $y'' - y' \sin x + e^x y = x,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = -1;$

г) $y'' - y = \sin x,$ $y(0) = y'(0) = 1;$

д) $y''' + xy'' = 1,$ $y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0.$

$$\begin{cases} y_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_1^{(p)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = e^x; \\ y_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_2^{(p)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = -e^x. \end{cases}$$

Отже, шуканим розв'язком заданої задачі Коші є сукупність функцій

$$\begin{cases} y_1 = e^x; \\ y_2 = -e^x. \end{cases}$$

Цей розв'язок єдиний за теоремою Коші існування і єдиності розв'язку.

ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Знайти перші три послідовні наближення таких задач Коші:

- | | |
|---|--|
| а) $y' - 2y = -2x^2 - 3,$ | $y(0) = 2;$ |
| б) $xy' = 2x - y,$ | $y(1) = 2;$ |
| в) $y' = x^2 - y^2,$ | $y(-1) = 0;$ |
| г) $\begin{cases} \dot{x} + 7x = y + 5, \\ \dot{y} + 2x + 5y = -37t, \end{cases}$ | $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 0; \end{cases}$ |
| д) $\begin{cases} y_1' = -y_2, \\ y_2' = -y_1, \end{cases}$ | $\begin{cases} y_1(0) = 2, \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$ |

2. Звести до інтегрального рівняння такі задачі Коші:

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|
| а) $y' - y = e^x,$ | $y(0) = 1;$ |
| б) $y'' + y = \cos x,$ | $y(0) = y'(0) = 0;$ |
| в) $y'' - y' \sin x + e^x y = x,$ | $y(0) = 1, \quad y'(0) = -1;$ |
| г) $y'' - y = \sin x,$ | $y(0) = y'(0) = 1;$ |
| д) $y''' + xy'' = 1,$ | $y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0.$ |

8.3. Метод малого параметра

Нехай маємо задачу, яка, крім основних невідомих величин, містить деякий параметр ε , причому для $\varepsilon = \varepsilon_0$ можна досить просто знайти розв'язок (незбурений розв'язок). Тоді розв'язок задачі при ε , близьких до ε_0 (збурений розв'язок), у багатьох випадках можна наближено дістати розвиненням за степенями $\varepsilon - \varepsilon_0$ з тією або іншою точністю. При цьому перший член ряду, який не містить $\varepsilon - \varepsilon_0$, одержимо з рівняння, яке називають *породжуючим* при $\varepsilon = \varepsilon_0$, тобто маємо незбурений розв'язок. Наступні члени дають поправки на збурений розв'язок. Ці поправки мають перший, другий і т. д. порядок мализни

(порівняно з $\varepsilon - \varepsilon_0$). Для знаходження цих членів застосуємо метод невизначених коефіцієнтів, тобто коефіцієнти при $\varepsilon - \varepsilon_0$, $(\varepsilon - \varepsilon_0)^2$ і т. д. позначаються деякими літерами і визначаються потім з умов задачі.

Таким способом можна дістати найбільш точний результат при ε близьких до ε_0 . При цьому чим менше $|\varepsilon - \varepsilon_0|$, тим менше членів ряду треба знаходити. Тому часто вважають $\varepsilon_0 = 0$. Звідси і походить назва методу – *метод малого параметра*.

Таким чином, метод малого параметра дає змогу, виходячи з розв'язку деяких «незбурених» задач, одержати розв'язок задач, постановка яких близька до «незбурених», якщо, звичайно, зміна постановки задачі не викликає принципової якісної зміни розв'язку.

У багатьох задачах за виглядом першого члена, що містить параметр, можна зробити висновки про залежність розв'язку від параметра при його малій зміні.

У теорії диференціальних рівнянь цей метод застосовують і до систем виду

$$\mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}', \dots, \mathbf{Y}^{(n-1)}, \varepsilon), \quad (8.30)$$

де

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}', \dots, \mathbf{Y}^{(n-1)}, \varepsilon) = \begin{pmatrix} f_1(x, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}', \dots, \mathbf{Y}^{(n-1)}, \varepsilon) \\ f_2(x, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}', \dots, \mathbf{Y}^{(n-1)}, \varepsilon) \\ \dots \\ f_n(x, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}', \dots, \mathbf{Y}^{(n-1)}, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

ε – малий параметр.

Розв'язок системи (8.30) шукають у вигляді степеневих рядів за параметром ε . При цьому якщо функції $f_i(x, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}', \dots, \mathbf{Y}^{(n-1)}, \varepsilon)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) є аналітичними за параметром ε і змінними $\mathbf{Y}, \mathbf{Y}', \dots, \mathbf{Y}^{(n-1)}$ то метод малого параметра називають *регулярним*.

Якщо права частина диференціального рівняння або системи не є аналітичною функцією параметра ε , то метод дослідження таких систем називають сингулярним методом малого параметра.

Приклад. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\dot{x}(t) = -x^2 + \frac{6}{t} \varepsilon, \quad x(1) = 1 + 3\varepsilon$$

за степенями ε до другого порядку включно.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок, розвинений за степенями ε з невідомими коефіцієнтами у вигляді

$$x(t) = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \dots$$

Тоді

$$\dot{x}_0 + \dot{x}_1\varepsilon + \dot{x}_2\varepsilon^2 + \dots \equiv -\left(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \dots\right)^2 + \frac{6}{t}\varepsilon.$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметра ε , послідовно знаходимо:

$$x_0 = \frac{1}{t}, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{3}{t^2} - 3t.$$

Отже, остаточно

$$x(t) = \frac{1}{t} + 3\varepsilon + \left(\frac{3}{t^2} - 3t\right)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2).$$

ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Знайти перші три члени розвинення розв'язку задачі Коші за степенями малого параметра ε :

- | | | |
|----|--------------------------------------|----------------------------|
| 1. | $y' = 4x\varepsilon - y^2,$ | $y(1) = 1;$ |
| 2. | $y' = \frac{2}{y} - 5x\varepsilon,$ | $y(1) = 2;$ |
| 3. | $y' = \frac{6\varepsilon}{x} - y^2,$ | $y(1) = 1 + 3\varepsilon;$ |
| 4. | $y' = e^{y-x} + y\varepsilon,$ | $y(0) = -\varepsilon.$ |

за степенями ε до другого порядку включно.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок, розвинений за степенями ε з невідомими коефіцієнтами у вигляді

$$x(t) = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \dots$$

Тоді

$$\dot{x}_0 + \dot{x}_1\varepsilon + \dot{x}_2\varepsilon^2 + \dots \equiv -\left(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \dots\right)^2 + \frac{6}{t}\varepsilon.$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметра ε , послідовно знаходимо:

$$x_0 = \frac{1}{t}, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{3}{t^2} - 3t.$$

Отже, остаточно

$$x(t) = \frac{1}{t} + 3\varepsilon + \left(\frac{3}{t^2} - 3t\right)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2).$$

ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Знайти перші три члени розвинення розв'язку задачі Коші за степенями малого параметра ε :

1. $y' = 4x\varepsilon - y^2, \quad y(1) = 1;$
2. $y' = \frac{2}{y} - 5x\varepsilon, \quad y(1) = 2;$
3. $y' = \frac{6\varepsilon}{x} - y^2, \quad y(1) = 1 + 3\varepsilon;$
4. $y' = e^{y-x} + y\varepsilon, \quad y(0) = -\varepsilon.$

8.4. Знаходження періодичних розв'язків диференціального рівняння за допомогою рядів Фур'є та метода малого параметра

При розв'язанні прикладних задач часто виникає необхідність у відшуканні періодичних розв'язків деякого диференціального рівняння. У цьому випадку доцільно шукати розв'язок у вигляді ряду Фур'є

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi}{l} t \right).$$

Зауваження. Диференціальне рівняння

$$x^{(n)} = F\left(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}\right) \quad (8.31)$$

має періодичний розв'язок $x_0(t)$ періоду T , якщо права частина рівняння (8.31) уздовж розглядуваної інтегральної кривої є періодична функція періоду T за першим аргументом.

Дійсно, підставляючи у рівняння (8.31) періодичний розв'язок $x = x_0(t)$, дістанемо тотожність

$$x_0^{(n)}(t) \equiv F\left(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \dots, x_0^{(n-1)}(t)\right).$$

Замінюючи t на $t + T$, ми в силу періодичності функції $x_0(t)$ та її похідних не змінимо лівої частини рівняння і не змінимо аргументів правої частини, починаючи з другого, отже,

$$F\left(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \dots, x_0^{(n-1)}(t)\right) \equiv F\left(t + T, x_0(t), \dot{x}_0(t), \dots, x_0^{(n-1)}(t)\right),$$

тобто функція F уздовж інтегральної кривої $x = x_0(t)$ має період T за аргументом t .

Таким чином, якщо права частина рівняння (8.31) при будь-якому виборі $x_0(t)$ не є періодична функція за першим аргументом, то періодичних розв'язків не існує. Якщо функція F не залежить явно від t , тобто є сталою відносно аргументу t , то F можна розглядати як періодичну за t функцію будь-якого періоду і тому не виключена можливість існування періодичних розв'язків будь-якого періоду.

Нехай, наприклад, треба знайти періодичні розв'язки рівняння

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t). \quad (8.32)$$

Для існування періодичного розв'язку необхідно припустити, що $f(t)$ є періодична функція. Без істотного обмеження спільності можна вважати, що $f(t)$ – періодична функція періоду 2π , оскільки якщо функція $f(t)$, мала би період T , то після перетворення незалежної змінної $t_1 = \frac{2\pi}{T} t$ права частина рівняння (8.32) стала би функцією періоду 2π за новою незалежною змінною t_1 .

Припустимо, що функція $f(t)$, крім того, неперервна і може бути розкладена в ряд Фур'є

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt). \quad (8.33)$$

Періодичний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (8.34)$$

Диференціюючи ряд (8.34) почленно два рази і підставляючи в рівняння (8.31), одержимо

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + a^2 \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right] \equiv \\ & \equiv \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt), \end{aligned}$$

звідки, якщо a не дорівнює цілому числу, визначаємо коефіцієнти ряду (8.34)

$$a_0 = \frac{A_0}{a^2}, \quad a_k = \frac{A_k}{a^2 - k^2}, \quad b_k = \frac{B_k}{a^2 - k^2}. \quad (8.35)$$

Отже, рівнянню (8.32) формально задовольняє ряд

$$\frac{A_0}{2a^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k \cos kt + B_k \sin kt}{a^2 - k^2}. \quad (8.36)$$

Ряд (8.36) збігається і допускає двократне почленне диференціювання, оскільки ряд (8.33), через неперервність функції $f(t)$, збігається рівномірно, а коефіцієнти ряду

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 (A_k \cos kt + B_k \sin kt)}{a^2 - k^2}, \quad (8.37)$$

складеного з других похідних від членів ряду (8.36), відрізняються від коефіцієнтів A_k і B_k ряду (8.33) лише множником $\left(-\frac{k^2}{a^2 - k^2}\right)$, що не залежить

від t і монотонно прямує до одиниці якщо $k \rightarrow \infty$. Отже, ряд (8.37) збігається рівномірно, а це означає, що ряд (8.36) можна було диференціювати почленно два рази. Таким чином, крім того, що ряд (8.36) формально задовольняє рівнянню (8.32), його сума $x(t)$ існує і є періодичним розв'язком рівняння (8.32).

Якщо a мало відрізняється від цілого числа n і $A_n \neq 0$ або $B_n \neq 0$, то настає явище *резонансу*, що полягає в різкому зростанні одного з коефіцієнтів

$$a_n = \frac{A_n}{a^2 - n^2}, \quad b_n = \frac{B_n}{a^2 - n^2},$$

якщо a наближається до n .

Коли $a = n$ і принаймні один з коефіцієнтів $A_n \neq 0$ або $B_n \neq 0$, то періодичних розв'язків не існує, оскільки резонуючим доданкам

$$A_n \cos nt + B_n \sin nt$$

у правій частині рівняння (8.32), згідно принципу суперпозиції (п. 3.5) відповідає у загальному розв'язку рівняння (8.32) неперіодичний доданок виду

$$t(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

тоді як решта доданків у загальному розв'язку рівняння будуть періодичними функціями. Отже, якщо $a = n$ періодичний розв'язок рівняння (8.32) існує лише у випадку коли в правій частині відсутні резонуючі члени $A_n \cos nt + B_n \sin nt$, тобто у випадку

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt = 0, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt = 0. \quad (8.38)$$

В останньому випадку, тобто якщо $a = n$, $A_n = B_n = 0$, періодичний розв'язок рівняння (8.32) існує, причому якщо $k \neq n$ коефіцієнти визначаються за формулами (8.35), а коефіцієнти a_n та b_n залишаються довільними, оскільки вираз $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ при довільних a_n і b_n є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння.

Приклад. Знайти періодичний розв'язок рівняння

$$\ddot{x} + 2x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4}.$$

Розв'язання. Шукатимемо періодичний розв'язок даного рівняння у вигляді ряду Фур'є

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Коефіцієнти a_0 , a_k і b_k визначимо за формулами (8.35). Оскільки $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4}$, тобто

$$A_0 = 0, A_k = 0, B_k = \frac{1}{k^4}, \text{ матимемо}$$

$$a_0 = 0, a_k = 0, b_k = \frac{1}{k^4(2 - k^2)}.$$

Тоді остаточно одержуємо періодичний розв'язок даного рівняння у вигляді

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4(2 - k^2)}.$$

Слід відзначити, що дане рівняння крім знайденого періодичного розв'язку, має і неперіодичні, що визначаються формулою загального розв'язку (одержати самостійно, використовуючи принцип суперпозиції)

$$x_{3.p.}(t) = C_1 \sin \sqrt{2}t + C_2 \cos \sqrt{2}t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4(2 - k^2)},$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Для наочності результатів, представимо їх у вигляді графіків на рис. 8.4, де

$$x1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3(2 - k^2)} \left[\frac{\sin \sqrt{2}t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin kt}{k} \right] - \text{частинний розв'язок, якщо } x(0) = \dot{x}(0) = 0;$$

$$x2(t) = \cos \sqrt{2}t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3(2 - k^2)} \left[\frac{\sin \sqrt{2}t}{1 + \sqrt{2}} + \frac{\sin kt}{k} \right] - \text{частинний розв'язок, якщо } x(0) = \dot{x}(0) = 1;$$

$$x3(t) = -\cos \sqrt{2}t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3(2 - k^2)} \left[\frac{\sin \sqrt{2}t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin kt}{k} \right] - \text{частинний розв'язок, якщо } x(0) = -1, \dot{x}(0) = 0;$$

$$xR(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4((k + 0,001)^2 - k^2)} - \text{явище резонансу, коли } a = k + 0,001$$

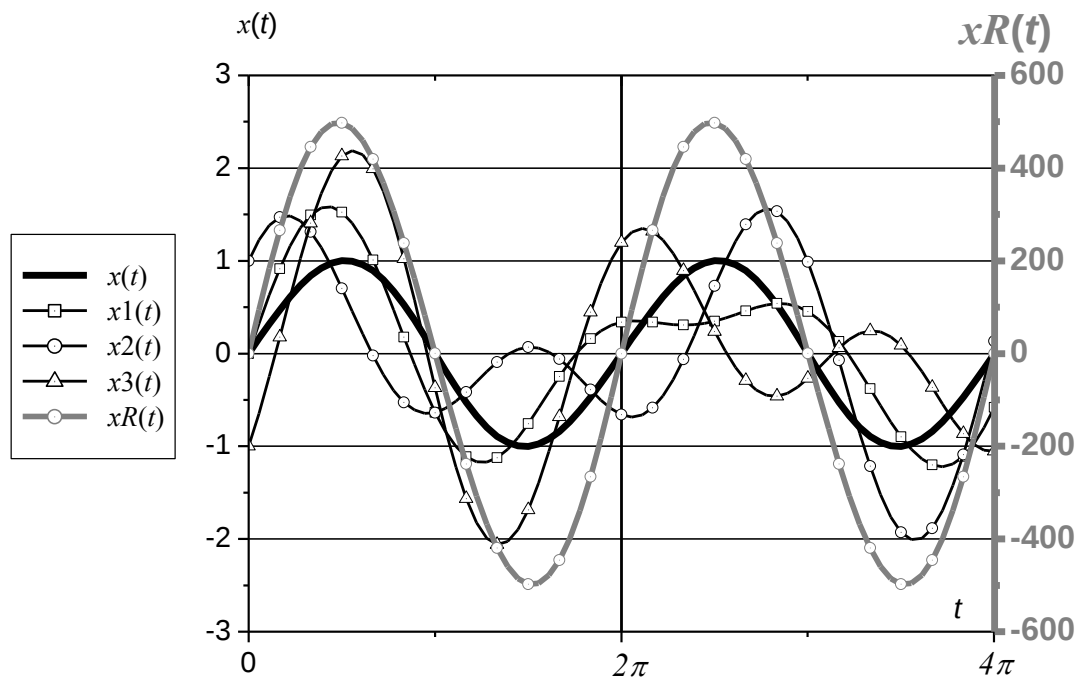


Рис. 8.4

Приклад. Знайти періодичний розв'язок рівняння

$$\ddot{x} + 4x = \sin^2 t.$$

Розв'язання. Оскільки умови існування (8.38) періодичного розв'язку даного рівняння не задовольняються, тобто

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot \sin 2t \, dt = 0,$$

але

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot \cos 2t \, dt \neq 0,$$

то періодичний розв'язок даного рівняння не існує.

У багатьох практичних задачах виникає питання про знаходження періодичного розв'язку диференціального рівняння виду

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \varepsilon), \quad (8.39)$$

де ε – малий параметр.

Якщо у рівнянні (8.39) покласти $\varepsilon = 0$, то матимемо лінійне рівняння виду (8.32), яке називають *породжуючим* для рівняння (8.39).

Одним з найефективніших методів відшукування періодичних розв'язків рівняння (8.39) є **метод малого параметра**, що був розроблений А. Пуанкаре і А.М. Ляпуновим і який широко застосовується у теперішній час при розв'язуванні самих різноманітних задач.

Спочатку сформулюємо деякі твердження, які нам знадобляться.

Теорема 1 (теорема Пуанкаре про аналітичну залежність розв'язку від параметру). Розв'язок $x(t, \varepsilon)$ диференціального рівняння $\dot{x} = f(t, x, \varepsilon)$, що задовольняє початкову умову $x(t_0) = x_0$, аналітично залежить від параметру ε в околі значення $\varepsilon = \varepsilon_0$, якщо функція f в заданій області зміни t і x і в деякій околі точки ε_0 неперервна за t і аналітично залежить від ε і x .

Нехай функція

$$x(t, \varepsilon, \beta_0, \beta_1) \quad (8.40)$$

є розв'язком рівняння

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \varepsilon), \quad (8.41)$$

що задовольняє початкові умови

$$x(t_0) = \varphi_0(t_0) + \beta_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{\varphi}_0(t_0) + \beta_1,$$

де функція $f(t, x, \dot{x}, \varepsilon)$ задовольняє умови теореми про аналітичну залежність розв'язку від параметру і має період 2π ; β_0 і β_1 – відхилення початкових значень розв'язку (8.40) та його похідної від початкових значень $\varphi_0(t_0)$ і $\dot{\varphi}_0(t_0)$ періодичного розв'язку породжуючого рівняння.

Якщо розв'язок (8.40) є періодичним з періодом 2π , то відомо, що мають бути виконані наступні умови:

$$\begin{cases} x(2\pi, \varepsilon, \beta_0, \beta_1) - x(0, \varepsilon, \beta_0, \beta_1) = 0, \\ \dot{x}(2\pi, \varepsilon, \beta_0, \beta_1) - \dot{x}(0, \varepsilon, \beta_0, \beta_1) = 0. \end{cases} \quad (8.42)$$

Позначаючи ліві частини цих рівнянь відповідно $\Phi_0(\varepsilon, \beta_0, \beta_1)$ і $\Phi_1(\varepsilon, \beta_0, \beta_1)$, запишемо систему (8.42) у вигляді

$$\begin{cases} \Phi_0(\varepsilon, \beta_0, \beta_1) = 0, \\ \Phi_1(\varepsilon, \beta_0, \beta_1) = 0. \end{cases} \quad (8.43)$$

Умови (8.43), які називають умовами періодичності є не тільки необхідними, а і достатніми для періодичності розв'язку (8.40). Тоді, згідно з теоремою про неявні функції, вірне таке твердження.

Теорема 2 (теорема Пуанкаре про існування та єдиність періодичного розв'язку). Якщо якобіан $\frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} \neq 0$ у точці $\varepsilon = \beta_0 = \beta_1 = 0$, то при

кожному достатньо малому за абсолютним значенням ε існує одна пара функцій $\beta_0(\varepsilon)$ і $\beta_1(\varepsilon)$, що задовольняють умови періодичності (8.43) і прямують до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$, тобто у зазначених умовах для кожного достатньо малого ε існує один і тільки один періодичний розв'язок рівняння (8.41), що прямує до періодичного розв'язку породжуючого рівняння при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Згідно з теоремою 1, яка досить легко узагальнюється на рівняння другого порядку, можна стверджувати, що розв'язки $x(t, \varepsilon)$ рівняння (8.39) будуть аналітичними функціями параметра ε при досить малих за модулем значеннях ε , якщо функція $f(t)$ неперервна, а функція $F(t, x, \dot{x}, \varepsilon)$, неперервна за t , аналітично залежить від інших аргументів: від x і $\dot{x}$ в області, у якій в подальшому будуть мінятися ці змінні, а від ε при досить малих за модулем значеннях ε .

Припускаючи, що ці умови виконані, шукаємо періодичний розв'язок $x(t, \varepsilon)$ у вигляді суми ряду

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + \dots \quad (8.44)$$

Диференціюючи цей ряд почленно два рази по t , дістанемо

$$\dot{x}(t, \varepsilon) = \dot{x}_0(t) + \varepsilon \dot{x}_1(t) + \varepsilon^2 \dot{x}_2(t) + \dots + \varepsilon^n \dot{x}_n(t) + \dots, \quad (8.45)$$

$$\ddot{x}(t, \varepsilon) = \ddot{x}_0(t) + \varepsilon \ddot{x}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{x}_2(t) + \dots + \varepsilon^n \ddot{x}_n(t) + \dots \quad (8.46)$$

Розвинемо функцію $F(t, x, \dot{x}, \varepsilon)$ в ряд за степенями $x - x_0$, $\dot{x} - \dot{x}_0$ і ε , матимемо

$$\begin{aligned} F(t, x, \dot{x}, \varepsilon) = & F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) + F'_x(t, x_0, \dot{x}_0, 0)(x - x_0) + \\ & + F'_{\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0, 0)(\dot{x} - \dot{x}_0) + F'_\varepsilon(t, x_0, \dot{x}_0, 0)\varepsilon + \dots \end{aligned} \quad (8.47)$$

Підставляючи (8.44) – (8.47) у рівняння (8.39), одержимо

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_0(t) + \varepsilon \ddot{x}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{x}_2(t) + \dots + \varepsilon^n \ddot{x}_n(t) + \dots + \\ & + a^2 [x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + \dots] = f(t) + \varepsilon [F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) + \\ & + F'_x(t, x_0, \dot{x}_0, 0)(\varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + \dots) + \\ & + F'_{\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0, 0)(\varepsilon \dot{x}_1(t) + \varepsilon^2 \dot{x}_2(t) + \dots + \varepsilon^n \dot{x}_n(t) + \dots) + \\ & + F'_\varepsilon(t, x_0, \dot{x}_0, 0)\varepsilon + \dots]. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε у лівій і правій частинах рівняння (8.48), дістанемо

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + a^2 x_0 = f(t), \\ \ddot{x}_1 + a^2 x_1 = F(t, x_0, \dot{x}_0, 0), \\ \ddot{x}_2 + a^2 x_2 = F'_x(t, x_0, \dot{x}_0, 0)x_1 + F'_{\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0, 0)\dot{x}_1 + F'_\varepsilon(t, x_0, \dot{x}_0, 0), \\ \dots \end{cases} \quad (8.49)$$

Перше з цих лінійних рівнянь співпадає з породжуючим рівнянням. Інтегруючи його і підставляючи знайдений розв'язок $x_0(t)$ в друге рівняння, одержимо для визначення $x_1(t)$ знову лінійне рівняння і т. ін.

Зараз ми розглядаємо лише питання про знаходження періодичних розв'язків рівняння (8.39), тому необхідно, щоб права частина цього рівняння була періодичною функцією за аргументом t .

Зауваження. Якщо права частина рівняння (8.39) явно залежить від t , то можна покласти, що її найменший період дорівнює 2π , при цьому, якщо $f(t)$ не дорівнює сталій величині, періодичні розв'язки рівняння (8.39) (якщо вони існують), при досить малому ε можуть мати лише періоди, що дорівнюють або кратні 2π .

Для знаходження періодичного розв'язку рівняння (8.48) у вигляді (8.44) треба визначити періодичні розв'язки $x_k(t)$ рівнянь (8.49). Дійсно, якщо розв'язок $x(t, \varepsilon)$ має сталий період 2π ($2\pi m$, m – ціле число) при досить малому за модулем ε , то

$$\begin{aligned} x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + \dots \equiv \\ \equiv x_0(t + 2\pi) + \varepsilon x_1(t + 2\pi) + \varepsilon^2 x_2(t + 2\pi) + \dots + \varepsilon^n x_n(t + 2\pi) + \dots \end{aligned} \quad (8.50)$$

Звідси випливає, що коефіцієнти при однакових степенях ε в лівій і правій частинах тотожності (8.50) мають бути рівними, тобто

$$x_n(t) \equiv x_n(t + 2\pi),$$

а це і означає періодичність функцій $x_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Отже, необхідно знайти періодичні розв'язки рівнянь (8.49). При цьому доцільно окремо розглянути наступні випадки.

1. Нерезонансний випадок: a не дорівнює цілому числу. У цьому випадку перше з рівнянь (8.49) має єдиний періодичний розв'язок $x_0 = \varphi_0(t)$, який відшукується за допомогою рядів Фур'є. Потім аналогічно знаходимо $x_1(t)$, $x_2(t)$ і т. ін. Підставляючи $x_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) у (8.44) матимемо періодичний розв'язок рівняння (8.39). При цьому, згідно теореми 2, відпадає необхідність знаходження загального члену ряду (8.44) для дослідження ряду на збіжність і можна, знайшовши декілька перших членів ряду (8.44), стверджувати, що при малому ε їх сума наближено дорівнює шуканому періодичному розв'язку.

2. Резонансний випадок. Метод малого параметра може бути застосований і в резонансному випадку, тобто коли у рівнянні (8.39) a дорівнює цілому числу n , або прямує до цілого числа n при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Якщо у рівнянні (8.39) a мало відрізняється від цілого числа n , точніше, різниця $a^2 - n^2$ має порядок малості не нижче чим ε , тобто

$$a^2 - n^2 = a_1 \varepsilon, \quad (8.51)$$

де a_1 обмежено при $\varepsilon \rightarrow 0$, то рівняння (8.39) можна переписати у вигляді

$$\ddot{x} + n^2 x = f(t) + (n^2 - a^2)x + \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \varepsilon),$$

звідки з урахуванням (8.51), матимемо

$$\ddot{x} + n^2 x = f(t) + \varepsilon F_1(t, x, \dot{x}, \varepsilon),$$

де функція F_1 задовольняє ті умови, які за припущенням задовольняє функція F .

Отже, в резонансному випадку можна вважати, що a дорівнює цілому числу, тобто

$$\ddot{x} + n^2 x = f(t) + \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \varepsilon). \quad (8.52)$$

Застосовуючи метод малого параметра, шукаємо періодичний розв'язок у вигляді ряду

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + \varepsilon^k x_k(t) + \dots$$

Як і раніше для визначення функцій $x_k(t)$ знову одержуємо рівняння (8.49), у яких $a^2 = n^2$, але у даному разі породжуюче рівняння

$$\ddot{x}_0 + n^2 x_0 = f(t) \quad (8.53)$$

має періодичний розв'язок лише тоді, коли у правій частині відсутні резонуючі члени, тобто якщо виконані умови (8.38). При виконанні цих умов, усі розв'язки (загальний розв'язок) рівняння (8.53) будуть періодичними періоду 2π і визначатимуться за формулою

$$x_0(t) = C_{10} \cos nt + C_{20} \sin nt + \varphi_0(t), \quad (8.54)$$

де $\varphi_0(t)$ – частинний періодичний розв'язок породжуючого рівняння (8.53).

Функція $x_1(t)$ визначається з рівняння

$$\ddot{x}_1 + n^2 x_1 = F(t, x_0, \dot{x}_0, 0). \quad (8.55)$$

Це рівняння також має періодичний розв'язок лише у разі виконання умов

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \cos nt \, dt = 0, \\ \int_0^{2\pi} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \sin nt \, dt = 0. \end{cases} \quad (8.56)$$

Рівняння (8.56) містять C_{10} і C_{20} , які, взагалі кажучи, і визначаються з цієї системи.

Нехай C_{10} і C_{20} задовольняють систему (8.56); тоді усі розв'язки рівняння (8.55) мають період 2π і визначаються за формулою

$$x_1(t) = C_{11} \cos nt + C_{21} \sin nt + \varphi_1(t),$$

де $\varphi_1(t)$ – частинний періодичний розв'язок рівняння (8.55), а C_{11} і C_{21} знову визначаються з двох умов відсутності резонуючих членів правої частини у наступному з рівнянь (8.49)

$$\ddot{x}_2 + n^2 x_2 = F'_x(t, x_0, \dot{x}_0, 0) x_1 + F'_{\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \dot{x}_1 + F'_\varepsilon(t, x_0, \dot{x}_0, 0)$$

і т. ін.

Отже, не кожному періодичному розв'язку (8.54) породжуючого рівняння (8.53) відповідають періодичні розв'язки рівняння (8.52), а лише тим, значення C_{10} і C_{20} яких задовольняють рівняння (8.56).

3. Резонанс n -го роду. Іноді у системах, що описуються рівнянням (8.39), спостерігаються інтенсивні коливання, коли власна частота мало відрізняється від $\frac{1}{n}$, де n – ціле число. Це явище має назву резонансу n -го роду.

З математичної точки зору це означає, що коли a мало відрізняється від $\frac{1}{n}$, де n – ціле число (більше одиниці), рівняння (8.39) може мати періодичні розв'язки періоду $2\pi n$, які не є у той же час періодичними розв'язками періоду 2π .

Отже, розглянемо рівняння

$$\ddot{x} + \frac{1}{n^2} x = f(t) + \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \varepsilon). \quad (8.57)$$

Шукатимемо періодичний розв'язок рівняння (8.57) періоду $2\pi n$ у вигляді (8.44). Підставляючи (8.44) у (8.57) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , дістанемо рівняння виду (8.49), у яких $a = \frac{1}{n}$.

Для визначення $x_0(t)$ одержуємо породжуюче рівняння

$$\ddot{x}_0 + \frac{1}{n^2} x_0 = f(t), \quad (8.58)$$

яке має періодичний розв'язок періоду $2\pi n$ лише тоді, коли у правій частині відсутні резонуючі члени, тобто коли

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi n} f(t) \cos \frac{t}{n} dt = 0, \\ \int_0^{2\pi n} f(t) \sin \frac{t}{n} dt = 0. \end{cases}$$

Якщо ці умови виконані, то всі розв'язки рівняння (8.58) мають період $2\pi n$ і мають вигляд

$$x_0(t) = C_{10} \cos \frac{t}{n} + C_{20} \sin \frac{t}{n} + \varphi_0(t),$$

де C_{10} і C_{20} – довільні сталі; $\varphi_0(t)$ – частинний періодичний розв’язок породжуючого рівняння (8.58).

Далі, як і раніше, функцію $x_1(t)$ дістанемо з рівняння

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{n^2} x_1 = F(t, x_0, \dot{x}_0, \varepsilon), \quad (8.59)$$

яке має періодичний розв’язок періоду $2\pi n$, якщо

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi n} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \cos \frac{t}{n} dt = 0, \\ \int_0^{2\pi n} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \sin \frac{t}{n} dt = 0, \end{cases} \quad (8.60)$$

Звідси визначаються C_{10} і C_{20} .

Якщо умови (8.60) задовольняються, то всі розв’язки рівняння (8.59) періоду $2\pi n$ мають вигляд

$$x_1(t) = C_{11} \cos \frac{t}{n} + C_{21} \sin \frac{t}{n} + \varphi_1(t),$$

де $\varphi_1(t)$ – частинний розв’язок рівняння (8.59), а C_{11} і C_{21} знову визначаються з двох умов відсутності резонуючих членів правої частини у наступному з рівнянь (8.49)

$$\ddot{x}_2 + \frac{1}{n^2} x_2 = F'_x(t, x_0, \dot{x}_0, 0) x_1 + F'_{\dot{x}}(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \dot{x}_1 + F'_\varepsilon(t, x_0, \dot{x}_0, 0)$$

і т. ін.

4. Автономний випадок. Припустимо, що права частина рівняння (8.39) не залежить явно від t , тобто має вигляд

$$\ddot{x} + a^2 x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \varepsilon), \quad (8.61)$$

де функція $F(x, \dot{x}, \varepsilon)$ задовольняє умови, що поставлені вище. На перший погляд здається, що дослідження рівняння (8.61) має бути простіше дослідження рівняння (8.39), у якому права частина залежить від аргументу t , однак у дійсності відсутність аргументу t у правій частині рівняння ускладнює задачу.

Якщо права частина явно залежить від t , то відомі можливі періоди розв’язків, оскільки вони можуть лише дорівнювати (або бути кратними) періоду правої частини уздовж розв’язків за аргументом t .

Якщо у правій частині відсутній аргумент t , то її можна розглядати, як періодичну функцію довільного періоду, а значить не виключена можливість існування розв’язків будь-якого періоду, причому період розв’язків, взагалі кажучи, буде функцією параметру ε . Виходячи з цього, шукати розв’язок

рівняння (8.61) у вигляді ряду (8.44) не доцільно, оскільки кожна з функцій $x_n(t)$ окремо не зобов'язана бути періодичною функцією. Отже, функції $x_n(t)$ не можуть бути знайдені розглянутими вище методами. Тому треба перейти у рівнянні (8.61) до нової незалежної змінної так, щоби за цією змінною рівняння мало постійний період, а вже потім шукати розв'язок у вигляді (8.44).

Спочатку для спрощення перетворимо рівняння (8.61) заміною незалежної змінної $t_1 = at$ до вигляду

$$\frac{d^2 x}{dt_1^2} + x = \varepsilon F_1(x, \dot{x}, \varepsilon). \quad (8.62)$$

Кожний розв'язок $x_0(t_1) = c_1 \cos(t_1 - t_0)$ породжуючого рівняння буде мати період 2π , а періодичні розв'язки рівняння (8.62) при $\varepsilon \neq 0$, якщо вони існують, будуть мати період $2\pi + \alpha(\varepsilon)$, причому можна показати, що $\alpha(\varepsilon)$ є аналітична функція при достатньо малому ε .

Розвинемо $\alpha(\varepsilon)$ в ряд за степенями ε , одержимо

$$2\pi + \alpha(\varepsilon) = 2\pi(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots + h_n\varepsilon^n + \dots), \quad (8.63)$$

де h_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – деякі невідомі сталі, які належить визначити.

Перетворимо змінні так, щоби періодичний розв'язок $x(t, \varepsilon)$ рівняння (8.62) мав би період 2π , а не $2\pi + \alpha(\varepsilon)$. Це досягається заміною змінних

$$t_1 = t_2(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots + h_n\varepsilon^n + \dots), \quad (8.64)$$

оскільки, з (8.63) випливає, що при зміні t_1 від 0 до $2\pi + \alpha(\varepsilon)$ нова змінна t_2 змінюється від 0 до 2π . З урахуванням (8.64) рівняння (8.62) перетворюється до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt_2^2} + \left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots + h_n\varepsilon^n + \dots\right)^2 x = \\ = \varepsilon \left(1 + h_1\varepsilon + \dots + h_n\varepsilon^n + \dots\right)^2 F_1 \left[x, \left(1 + h_1\varepsilon + \dots + h_n\varepsilon^n + \dots\right)^{-1} \frac{dx}{dt_2}, \varepsilon \right]. \end{aligned} \quad (8.65)$$

Періодичний розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді

$$x(t_2, \varepsilon) = x_0(t_2) + \varepsilon x_1(t_2) + \varepsilon^2 x_2(t_2) + \dots + \varepsilon^n x_n(t_2) + \dots, \quad (8.66)$$

де $x_n(t_2)$ – періодичні функції аргументу t_2 періоду 2π . Підставляючи (8.66) до рівняння (8.65) і дорівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε у лівій та правій частинах рівності, матимемо

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = c \cos(t_2 - t_0),$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2h_1 x_0 + F_1(x_0, \dot{x}_0, 0)$$

або

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2h_1 c \cos(t_2 - t_0) + F_1(c \cos(t_2 - t_0), -c \sin(t_2 - t_0), 0), \quad (8.67)$$

.....
Для того щоб рівняння (8.67) мало періодичні розв'язки, необхідно і достатньо, щоби у правій його частині були відсутні резонуючі члени, тобто щоб

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} F_1(c \cos(t_2 - t_0), -c \sin(t_2 - t_0), 0) \sin(t_2 - t_0) dt_2 = 0, \\ -2h_1 c + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_1(c \cos(t_2 - t_0), -c \sin(t_2 - t_0), 0) \cos(t_2 - t_0) dt_2 = 0. \end{cases}$$

Перше з цих рівнянь дає можливість знайти значення c , а друге – h_1 , визначивши які, ми знайдемо ті розв'язки $x_0 = c \cos(t_2 - t_0)$ породжуючого рівняння, в околі яких при малому ε з'являються періодичні розв'язки рівняння (8.62), і наближено визначимо період шуканого розв'язку

$$2\pi + \alpha(\varepsilon) \approx 2\pi(1 + h_1 \varepsilon).$$

Знаючи c і h_1 , можна визначити $x_1(t_2)$ і, якщо треба, тим же методом обчислити $x_2(t_2)$, $x_3(t_2)$ і т. ін.

Приклад. Наближено (визначити перші два члени ряду (8.44)) знайти періодичний розв'язок рівняння

$$\ddot{x} + 2x = \sin t + \varepsilon x,$$

де ε – малий параметр.

Розв'язування. У даному разі маємо нерезонансний випадок, оскільки $a = \sqrt{2}$. Шукатимемо розв'язок у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots$$

Функції $x_0(t)$ і $x_1(t)$ дістанемо із перших двох рівнянь системи (8.49), які в нашому випадку матимуть вигляд

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + a^2 x_0 = \sin t, \\ \ddot{x}_1 + a^2 x_1 = F(t, x_0, \dot{x}_0, 0). \end{cases}$$

Відомими методами (розділ 4) теорії звичайних диференціальних рівнянь відшукуємо періодичний розв'язок першого (породжуючого) з рівнянь, одержимо

$$x_0(t) = \sin t.$$

Тоді для відшукування функції $x_1(t)$, матимемо рівняння

$$\ddot{x}_1 + 2x_1 = \sin t.$$

Періодичний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x_1(t) = \sin t.$$

Отже, наближений періодичний розв'язок запишемо у вигляді

$$x(t, \varepsilon) \approx \sin t + \varepsilon \sin t$$

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Коли диференціальне рівняння n -го порядку має періодичний розв'язок?
2. Які методи застосовуються для знаходження періодичних розв'язків диференціальних рівнянь?
3. Що таке явище резонансу?
4. Яке рівняння називається породжуючим?
5. Сформулюйте теорему Пуанкаре про аналітичну залежність розв'язку диференціального рівняння від параметру.
6. Сформулюйте теорему Пуанкаре про існування та єдиність періодичного розв'язку диференціального рівняння.
7. Знайти періодичний розв'язок рівняння

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^4}.$$

$$\text{Відповідь: } x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 - n^2) \sin nt - 2n \cos nt}{\left[(2 - n^2)^2 + 4n^2 \right] n^4}.$$

8. Знайти наближено (два перших члена розвинення в ряд) періодичні розв'язки з періодом, що дорівнює періоду правої частини рівняння; ε – малий параметр:

$$\text{а) } \ddot{x} + 3x = 2 \sin t + \varepsilon \dot{x}^2, \text{ відповідь: } x \approx \sin t + \varepsilon \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cos 2t \right);$$

$$\text{б) } \ddot{x} + 2x = \sin t + \varepsilon x^2, \text{ відповідь: } x \approx \sin t + \varepsilon \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2t \right);$$

$$\text{в) } \ddot{x} + 5x = \cos 2t + \varepsilon x^2, \text{ відповідь: } x \approx \cos 2t + \varepsilon \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{22} \cos 4t \right).$$

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Коли диференціальне рівняння n -го порядку має періодичний розв'язок?
2. Які методи застосовуються для знаходження періодичних розв'язків диференціальних рівнянь?
3. Що таке явище резонансу?
4. Яке рівняння називається породжуючим?
5. Сформулюйте теорему Пуанкаре про аналітичну залежність розв'язку диференціального рівняння від параметру.
6. Сформулюйте теорему Пуанкаре про існування та єдиність періодичного розв'язку диференціального рівняння.
7. Знайти періодичний розв'язок рівняння

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^4}.$$

Відповідь: $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 - n^2) \sin nt - 2n \cos nt}{\left[(2 - n^2)^2 + 4n^2\right] n^4}.$

8. Знайти наближено (два перших члена розвинення в ряд) періодичні розв'язки з періодом, що дорівнює періоду правої частини рівняння; ε – малий параметр:

а) $\ddot{x} + 3x = 2 \sin t + \varepsilon x^2$, відповідь: $x \approx \sin t + \varepsilon \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cos 2t \right);$

б) $\ddot{x} + 2x = \sin t + \varepsilon x^2$, відповідь: $x \approx \sin t + \varepsilon \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2t \right);$

в) $\ddot{x} + 5x = \cos 2t + \varepsilon x^2$, відповідь: $x \approx \cos 2t + \varepsilon \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{22} \cos 4t \right).$

8.5. Метод Ейлера

Простий метод Ейлера (метод ламаних). Нехай дано диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y) \quad (8.68)$$

з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0. \quad (8.69)$$

Вибравши досить малий крок h , побудуємо систему рівновіддалених точок

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Шукану інтегральну криву $y = y(x)$, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, наближено замінимо ламаною $M_0 M_1 M_2 \dots$ (рис. 8.5) з вершинами $M_i(x_i, y_i)$

($i = 0, 1, 2, \dots$), ланки якої $M_i M_{i+1}$ прямолінійні між прямими $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ і мають підйом

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \quad (8.70)$$

(ламана Ейлера).

Отже, ланки $M_i M_{i+1}$ ламаної Ейлера у кожній вершині $M_i(x_i, y_i)$ мають напрямок $y_i = f(x_i, y_i)$, який співпадає з напрямком інтегральної кривої рівняння (8.68), що проходить через точку $M_i(x_i, y_i)$.

З формули (8.70) випливає, що значення y_i можуть бути визначені за формулами (простий метод Ейлера)

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad \Delta y_i = hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (8.71)$$

Для геометричної побудови ламаної Ейлера виберемо полюс $P(-1, 0)$ і на осі ординат відкладемо відрізок $OA_0 = f(x_0, y_0)$ (рис. 8.5). Кутовий коефіцієнт променя PA_0 буде дорівнювати $f(x_0, y_0)$; тому, щоб одержати першу ланку ламаної Ейлера, достатньо з точки $M_0(x_0, y_0)$ провести пряму $M_0 M_1$ паралельно PA_0 до перетинання з прямою $x = x_1$ у деякій точці $M_1(x_1, y_1)$.

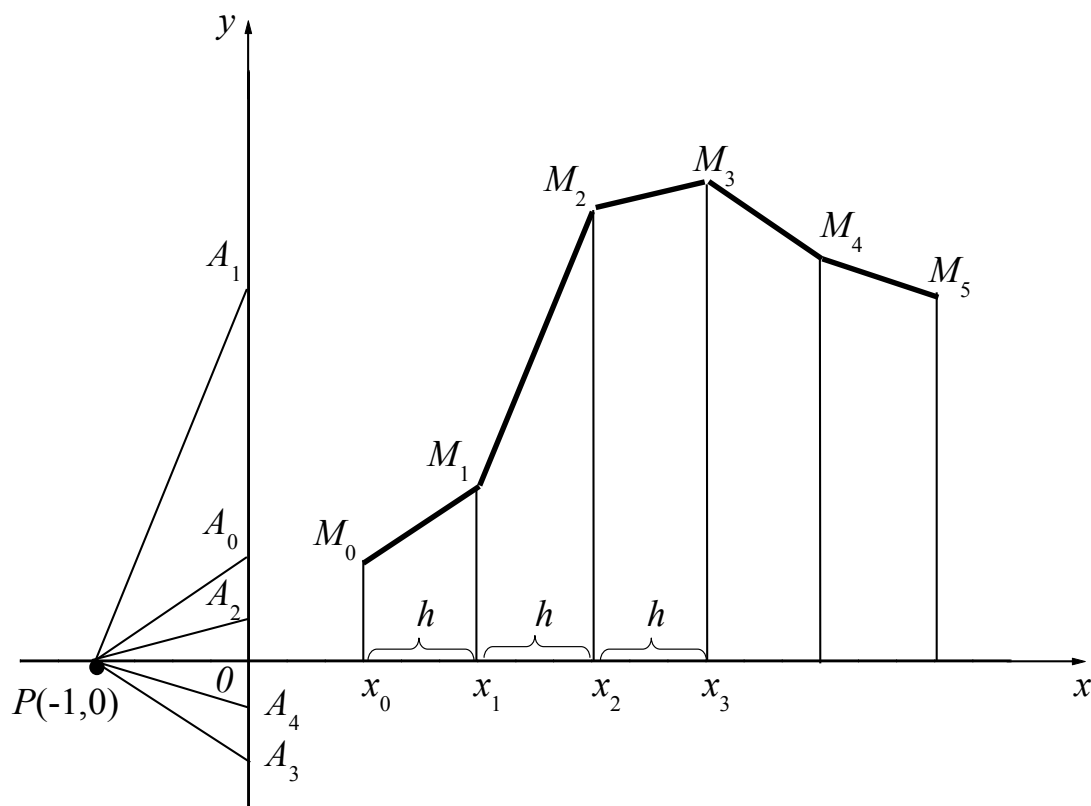


Рис. 8.5

Прийнявши точку $M_1(x_1, y_1)$ за початкову, відкладаємо на осі ординат відрізок $OA_1 = f(x_1, y_1)$ і через точку $M_1(x_1, y_1)$ проводимо пряму M_1M_2 паралельно PA_1 до перетинання у точці $M_2(x_2, y_2)$ з прямою $x = x_2$ і т. ін.

Простий метод Ейлера є найпростішим чисельним методом інтегрування диференціального рівняння. Його недоліки:

- мала точність (похибка порядку h^2 на кожному кроці);
- систематичне нагромадження помилок.

Можна показати, що коли права частина рівняння (6.68) є неперервною функцією, то послідовність ламаних Ейлера при $h \rightarrow 0$ на досить малому відрізку $[x_0, x_0 + H]$ рівномірно прямує до шуканої інтегральної кривої $y = y(x)$.

Метод Ейлера досить просто розповсюджується на системи диференціальних рівнянь.

Модифікації методу Ейлера. Знову розглянемо задачу Коші (6.68), (6.69). Вибравши крок h , покладемо

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Більш точним є *удосконалений метод ламаних* (рис. 8.6), згідно з яким спочатку обчислюють проміжні значення

$$x_{i+0.5} = x_i + \frac{h}{2}, \quad y_{i+0.5} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

і знаходять значення напрямку поля інтегральних кривих в середній точці, тобто

$$f_{i+0.5} = f(x_{i+0.5}, y_{i+0.5}),$$

а потім обчислюють

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i+0.5}. \quad (8.72)$$

Іншою модифікацією методу Ейлера є *удосконалений метод Ейлера-Коші*, при якому спочатку визначається „грубе наближення” розв’язку

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf_i,$$

виходячи з якого відшукується напрямок поля інтегральних кривих

$$\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}).$$

Після чого наближено обчислюють

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f_i + \tilde{f}_{i+1}}{2}.$$

Модифікації методу Ейлера мають на кожному кроці похибку порядку h^3 і нерідко застосовуються в обчислювальній практиці.

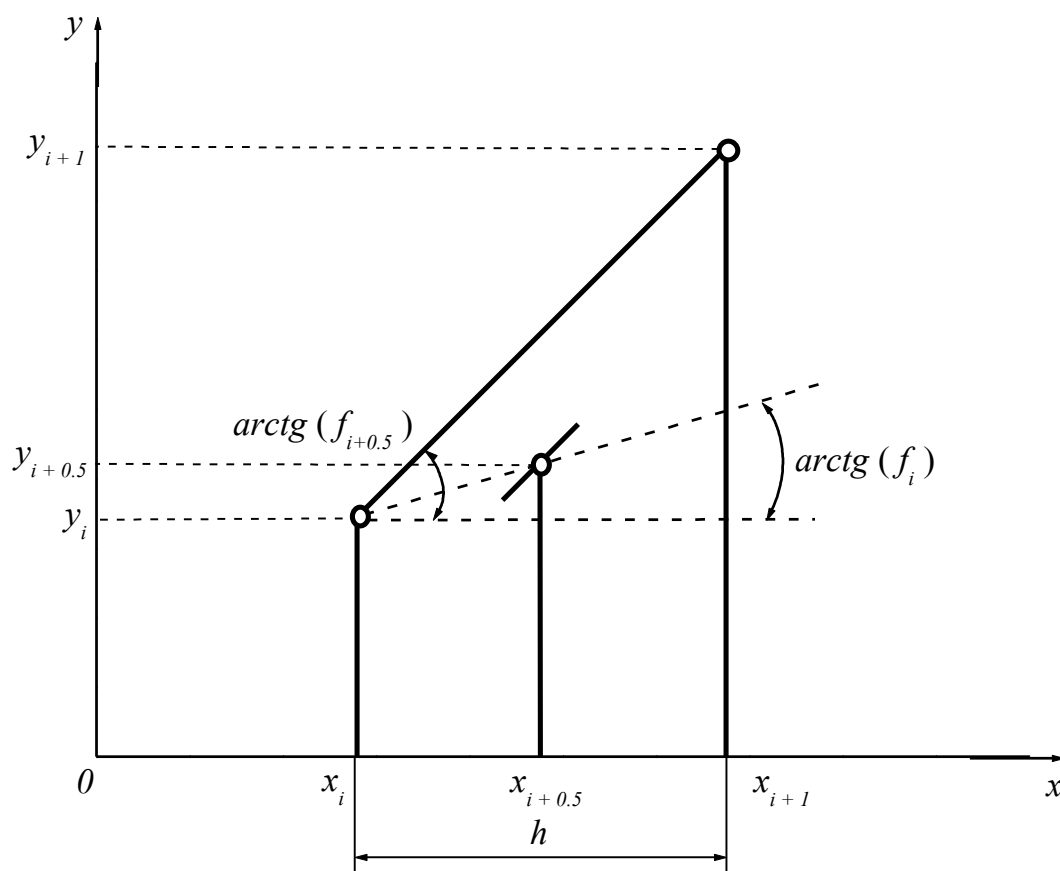


Рис. 8.6

Приклад. Застосовуючи простий метод Ейлера та удосконалений метод ламаних знайти наближений розв'язок (вибравши крок $h = 0.05$) задачі Коші

$$y' - 3y = x^2, \quad y(0) = 5 \quad (8.73)$$

на відрізку $[0; 0.5]$. Наближений розв'язок порівняти з точним розв'язком (одержати самостійно).

Розв'язання. Наближений розв'язок шукатимемо за формулами (8.71), (8.72). Результати розрахунків наведені у таблиці 8.4. Для порівняння в першому стовпці розташовані значення точного розв'язку $y(x) = \frac{-2 + 137e^{3x} - 6x - 9x^2}{27}$. З наведеної таблиці видно, що абсолютна похибка значення $y(0.5)$ складає 2,196 при обчисленні простим методом Ейлера і 0,113 – удосконаленим методом ламаних. Звідки відносна похибка приблизно дорівнює 11% і 0,5% відповідно.

Для наочності наведені графіки точного та наближених розв'язків (рис. 8.7) задачі Коші (8.73). З графіків теж видно, що більш точним є модифікація методу Ейлера (удосконалений метод ламаних), оскільки при обчисленні значень на кожному наступному відрізку простим методом Ейлера дані не є точними і містять похибки, що залежать від неточності попередніх обчислень (нагромадження помилок).

Таблиця 8.4

Порівняльний аналіз точного і наближених розв'язків задачі Коші (8.73)

x	y(x) точний розв'язок	y1(x) метод Ейлера	абсолютна похибка	відносна похибка	y2(x) модифікований метод Ейлера	абсолютна похибка	відносна похибка
0,00	5	5	0,000	0,00%	5	0,000	0,00%
0,05	5,8092	5,75	0,059	1,03%	5,8063	0,003	0,05%
0,10	6,7497	6,6126	0,137	2,07%	6,7428	0,007	0,10%
0,15	7,8428	7,605	0,238	3,13%	7,8309	0,012	0,15%
0,20	9,1137	8,7469	0,367	4,19%	9,0953	0,018	0,20%
0,25	10,5914	10,0609	0,531	5,27%	10,5646	0,027	0,25%
0,30	12,3095	11,5732	0,736	6,36%	12,2721	0,037	0,30%
0,35	14,3072	13,3137	0,993	7,46%	14,2566	0,051	0,35%
0,40	16,6302	15,3169	1,313	8,57%	16,563	0,067	0,41%
0,45	19,3313	17,6224	1,709	9,70%	19,2434	0,088	0,46%
0,50	22,4719	20,2759	2,196	10,83%	22,3585	0,113	0,51%

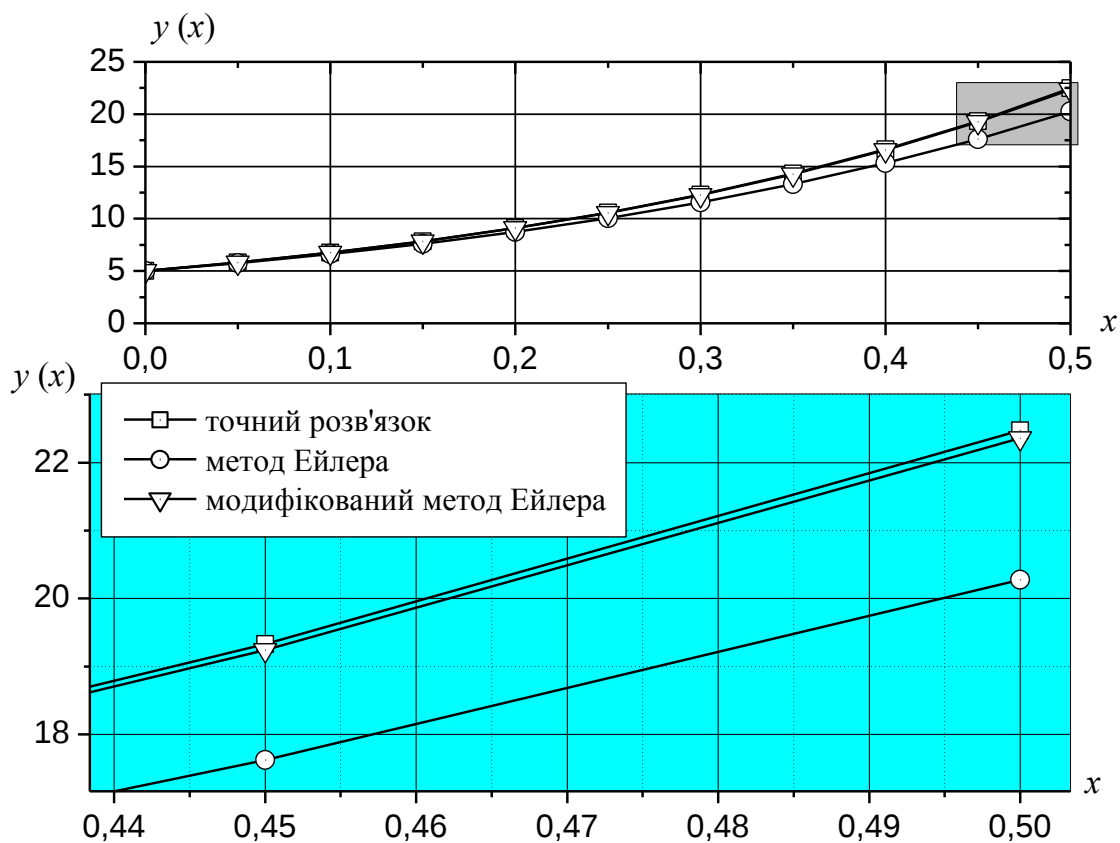


Рис. 8.7

Метод Ейлера та його модифікації є найпростішими представниками *скінченнорізницевого* методів (*покрокових методів*) для наближеного розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь виду

$$y'_k = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

з початковими умовами

$$y_k(x_0) = y_k^{(0)}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

При застосуванні скінченнорізницевого методу шуканий розв'язок $y_k = y_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) послідовно будується на системі точок (вузлів) $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), де h – вибраний крок. Процес обчислень складається з одноманітних циклів, що повторюються і кожний з яких забезпечує перехід від значення $y_k(x_i)$ до значення $y_k(x_{i+1})$, починаючи з початкового $y_k^{(0)}$. Тому схема обчислень, взагалі кажучи, досить легко програмується і зручна для реалізації.

ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Методом Ейлера та його модифікаціями розв'язати такі задачі Коші:

1. $y' = y$, $y(1) = -1$ на відрізку $[1; 2]$;
2. $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $y(0) = 1$ на відрізку $[0; 1]$;
3. $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = 0$ на відрізку $[0; 0.5]$;
4. $y' = 1 + 0.2y \sin x - 1.5y^2$, $y(0) = 0$ на відрізку $[0; 1]$;
5. $y' = \frac{y}{x+1} - y^2$, $y(0) = 1$ на відрізку $[0; 1]$.

Метод Ейлера та його модифікації є найпростішими представниками *скінченнорізницевого* методів (*покрокових методів*) для наближеного розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь виду

$$y'_k = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

з початковими умовами

$$y_k(x_0) = y_k^{(0)}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

При застосуванні скінченнорізницевого методу шуканий розв'язок $y_k = y_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) послідовно будується на системі точок (вузлів) $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), де h – вибраний крок. Процес обчислень складається з одноманітних циклів, що повторюються і кожний з яких забезпечує перехід від значення $y_k(x_i)$ до значення $y_k(x_{i+1})$, починаючи з початкового $y_k^{(0)}$. Тому схема обчислень, взагалі кажучи, досить легко програмується і зручна для реалізації.

ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Методом Ейлера та його модифікаціями розв'язати такі задачі Коші:

1. $y' = y$, $y(1) = -1$ на відрізку $[1; 2]$;
2. $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $y(0) = 1$ на відрізку $[0; 1]$;
3. $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = 0$ на відрізку $[0; 0.5]$;
4. $y' = 1 + 0.2y \sin x - 1.5y^2$, $y(0) = 0$ на відрізку $[0; 1]$;
5. $y' = \frac{y}{x+1} - y^2$, $y(0) = 1$ на відрізку $[0; 1]$.

8.6. Метод Рунге-Кутта

Одним із найрозповсюджених методів розв'язування задачі Коші (8.68), (8.69) для звичайних диференціальних рівнянь є *метод Рунге-Кутта четвертого порядку апроксимації*. За цим методом на розглядуваному кроці враховується зміна похідної y' , а загальною робочою формулою є

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right) \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

де h – крок інтегрування.

Послідовність дій в методі Рунге-Кутта така: значення невідомої функції y_{i+1} – розв'язку рівняння (8.68) з початковими умовами (6.69) визначають за формулою

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad (8.74)$$

де

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} \left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right) \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (8.75)$$

Величини $k_j^{(i)}$, $j = 1, 2, 3, 4$, в свою чергу, послідовно обчислюються за формулами

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), \\ k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), \\ k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \\ k_4^{(i)} = hf\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right). \end{cases} \quad (8.76)$$

Якщо задача Коші розглядається на деякому відрізку $x \in [a; b]$ то для обчислення за формулами (8.74) – (8.76) зручно вибрати

$$h = \frac{b - a}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (N - \text{кількість точок розбивки})$$

і користатися схемою наведеною у таблиці 8.5.

Метод Рунге-Кутта володіє значною точністю і незважаючи на свою трудомісткість, широко використовується при чисельному розв'язуванні диференціальних рівнянь. Крім того, важливою перевагою цього методу є можливість застосування „змінного кроку” інтегрування.

Метод Рунге-Кутта застосовується також для наближеного розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь.

Нехай дана система диференціальних рівнянь

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y),$$

де

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad F(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Нехай початкові умови також записані у векторній формі

$$Y(x_0) = Y_0.$$

Схема метода Рунге-Кутта

Номер точки розв'язку, i	Допоміжні дані			Наближений розв'язок (8.74)
	аргументи функції f у (8.76)	$k_j^{(i)} \quad j = 1, \dots, 4$ за (8.76)	Δy_i за (8.75)	
0	(x_0, y_0)	$k_1^{(0)}$	Δy_0	y_1
	$\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right)$	$k_2^{(0)}$		
	$\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right)$	$k_3^{(0)}$		
	$(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)})$	$k_4^{(0)}$		
1	(x_1, y_1)	$k_1^{(1)}$	Δy_1	y_2
	$\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}\right)$	$k_2^{(1)}$		
	$\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2}\right)$	$k_3^{(1)}$		
	$(x_1 + h, y_1 + k_3^{(1)})$	$k_4^{(1)}$		
.....				
$N - 1$	(x_{N-1}, y_{N-1})	$k_1^{(N-1)}$	Δy_{N-1}	y_N
	$\left(x_{N-1} + \frac{h}{2}, y_{N-1} + \frac{k_1^{(N-1)}}{2}\right)$	$k_2^{(N-1)}$		
	$\left(x_{N-1} + \frac{h}{2}, y_{N-1} + \frac{k_2^{(N-1)}}{2}\right)$	$k_3^{(N-1)}$		
	$(x_{N-1} + h, y_{N-1} + k_3^{(N-1)})$	$k_4^{(N-1)}$		

Задаючи деякий крок h і вводячи стандартні позначення $x_i = x_0 + ih$ і $Y_i = Y_i(x_1)$, $Y_{i+1} = Y_i + \Delta Y_i$ при $i = 0, 1, 2, \dots$ покладемо

$$K_1^{(0)} = hF(x_0, Y_0), \quad K_2^{(0)} = hF\left(x_0 + \frac{h}{2}, Y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right),$$

$$K_3^{(0)} = hF\left(x_0 + \frac{h}{2}, Y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right), \quad K_4^{(0)} = hF\left(x_0 + h, Y_0 + K_3^{(0)}\right).$$

За методом Рунге-Кутта ΔY_0 наближено обчислюють за формулою

$$\Delta Y_0 = \frac{1}{6} \left(K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} + 2K_3^{(0)} + K_4^{(0)} \right),$$

звідси $Y_1 = Y_0 + \Delta Y_0$.

Далі прийнявши (x_1, Y_1) за початкові дані та повторюючи той же процес, находимо Y_2 . Аналогічно обчислюються Y_i ($i = 3, 4, \dots$).

Приклад. Методом Рунге-Кутта знайти на відрізку $[0; 0.5]$ наближений розв'язок (вибравши крок $h = 0.05$) задачі Коші

$$y' - 3y = x^2, \quad y(0) = 5. \quad (8.77)$$

Розв'язання. Результати обчислень одержані методом Рунге-Кутта за допомогою формул (8.74) – (8.76) і наведені у таблиці 8.6. Для порівняння у першому стовпці розташовані значення точного розв'язку, які підтверджують високу точність методу Рунге-Кутта.

Приклад. Знайти на відрізку $[0; 10]$ наближений розв'язок задачі Коші

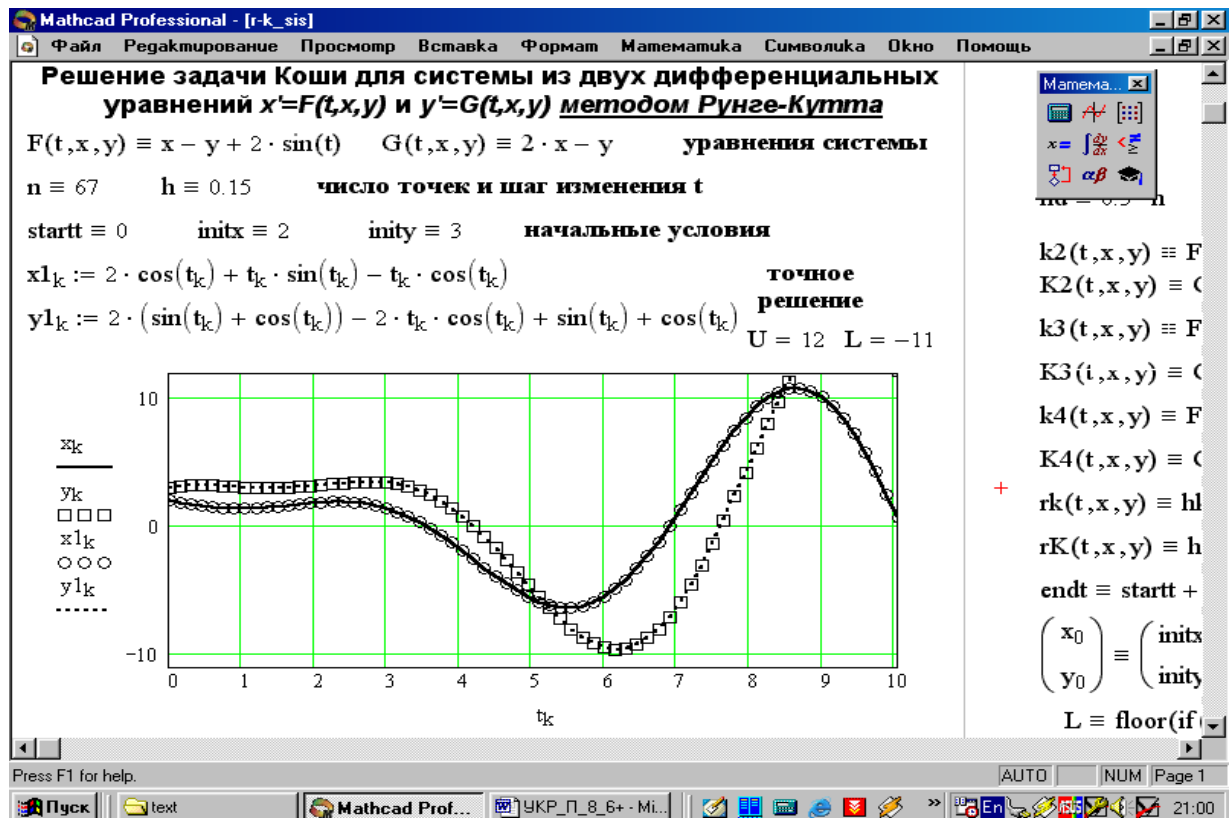
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2 \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y; \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Розв'язання. Реалізація методу Рунге-Кутта для розв'язування даної задачі Коші у системі MathCAD показана на рис. 8.8.

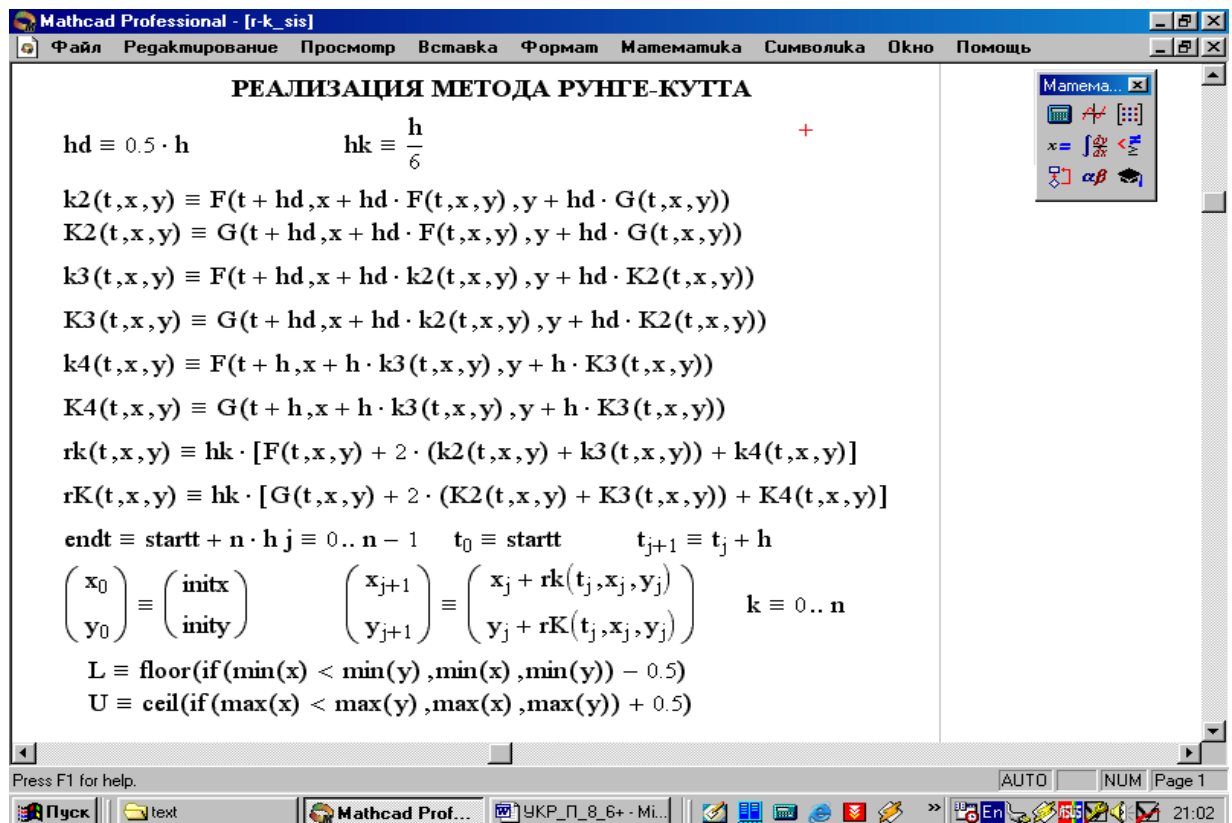
Таблиця 8.6

Порівняльний аналіз точного і наближених розв'язків задачі Коші (8.77)

х	у(х) точний розв'язок	у1(х) метод Рунге-Кутта	абсолютна похибка	відносна похибка
0,00	5,0000000	5,0000000	0,0000000	0,0000%
0,05	5,8092145	5,8092113	0,0000032	0,0001%
0,10	6,7496539	6,7496464	0,0000075	0,0001%
0,15	7,8428248	7,8428117	0,0000131	0,0002%
0,20	9,1137139	9,1136936	0,0000203	0,0002%
0,25	10,5913519	10,5913223	0,0000296	0,0003%
0,30	12,3094676	12,3094263	0,0000413	0,0003%
0,35	14,3072483	14,3071922	0,0000561	0,0004%
0,40	16,6302229	16,6301485	0,0000744	0,0004%
0,45	19,3312888	19,3311914	0,0000974	0,0005%
0,50	22,4719038	22,4717780	0,0001258	0,0006%

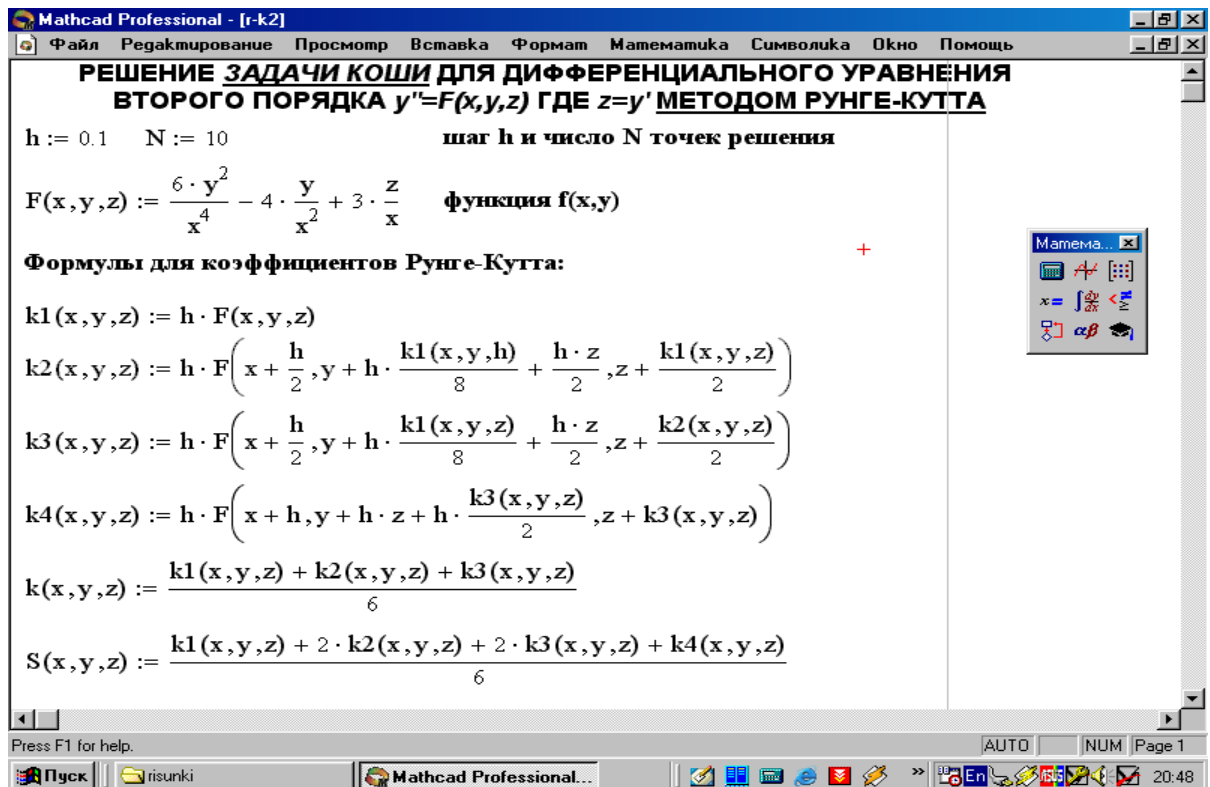


a

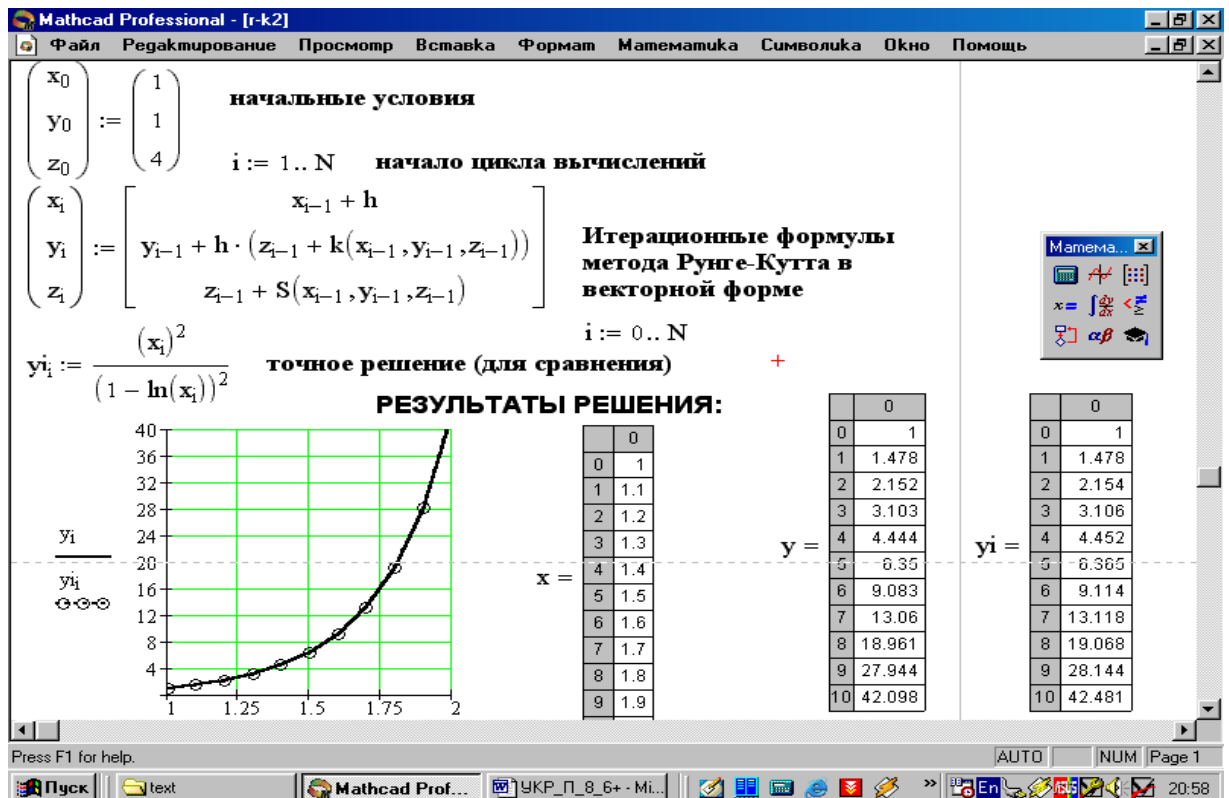


б

Рис. 8.8. Розв'язування системи двох диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта: а – ліва частина документа; б – права частина документа



а



б

Рис. 8.9. Алгоритм розв'язування методом Рунге-Кутта рівняння $y'' = F(x, y, y')$:
а – початок документа; б – кінець документа

Метод Рунге-Кутта можна застосовувати і для розв'язування задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку. На рис. 8.9 показаний документ MathCAD з реалізацією цього методу щодо розв'язування рівняння виду $y'' = F(x, y, y')$.

Наприкінці цього розділу слід зазначити, що існує багато інших наближених методів розв'язування задачі Коші для диференціальних рівнянь та їх систем, але вони не входять до розгляду у курсі диференціальних рівнянь і тому з ними можна ознайомитися у додатковій літературі, наприклад, у літературі по чисельним методам. Крім цього, завдяки сучасним технологіям практично всі чисельні методи реалізовані у вигляді вбудованих функцій у таких потужних і ефективних математичних пакетах як MathCAD, Matlab, Mathematica, Maple та ін. Отже, для застосування наближених методів до розв'язування диференціальних рівнянь досить володіти сучасними комп'ютерними технологіями.

ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Методом Рунге-Кутта розв'язати такі задачі Коші:

- | | | | |
|----|--|--|--------------------------|
| а) | $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2; \end{cases}$ | $\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ | на відрізку $[0; 1]$; |
| б) | $\begin{cases} \dot{x} = y - 5 \cos t, \\ \dot{y} = 2x + y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ | на відрізку $[0; 2]$; |
| в) | $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ | на відрізку $[0; 0.5]$; |
| г) | $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ | на відрізку $[0; 1]$; |
| д) | $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}; \end{cases}$ | $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ | на відрізку $[0; 0.5]$. |

2. Користаючись модифікованим методом Ейлера і методом Рунге-Кутта, розв'язати задачу Коші для диференціальних рівнянь:

- | | | |
|----|----------------------------|--------------|
| а) | $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0,$ | $y(0) = 1;$ |
| б) | $xy' = y - xe^{y/x},$ | $y(1) = 2;$ |
| в) | $y' = \frac{y}{3x - y^2},$ | $y(0) = -1.$ |

3. Користуючись методом Рунге-Кутта, розв'язати задачу Коші для диференціальних рівнянь:

- | | | | |
|----|-------------------|-------------|--------------|
| а) | $x^2 y'' = y'^2,$ | $y(1) = 1,$ | $y'(1) = 1;$ |
|----|-------------------|-------------|--------------|

$$\begin{array}{lll}
 \text{б)} & yy'' + y = y'^2, & y(0) = 1 \qquad y'(0) = -1; \\
 \text{в)} & xy'' = y' + x(y'^2 + x^2), & y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1, \qquad y'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2.
 \end{array}$$

РОЗДІЛ 9

ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

9.1. Геометричні задачі

Розв'язування практичної задачі за допомогою диференціального рівняння складається з трьох етапів:

- складання диференціального рівняння;
- його розв'язування;
- дослідження розв'язку.

Геометричну задачу можна розв'язувати за такою схемою:

- ❖ позначити через $y = y(x)$ рівняння шуканої кривої та зобразити її на площині XOY у вигляді деякої кривої;
- ❖ взяти довільну точку $(x; y)$ шуканої кривої і, якщо передбачено умовою задачі, провести через неї деяку пряму (можливо дотичну або нормаль) та записати її рівняння, використовуючи геометричний зміст похідної;
- ❖ за допомогою умови задачі скласти диференціальне рівняння, пов'язуючи всі введені величини;
- ❖ якщо передбачено умовою задачі, то виділити початкову умову;
- ❖ розв'язати та дослідити складене диференціальне рівняння.

Задача 1. Знайти криві, що мають у кожній точці таку властивість: відрізок дотичної, замкнений між осями координат, поділяється в точці дотику навпіл.

Розв'язання. Нехай $y = y(x)$ – рівняння шуканої кривої і $M(x; y)$ – довільна точка цієї кривої (рис. 9.1). Проведемо через точку $M(x; y)$ відрізок AB дотичної до кривої $y = y(x)$ і розглянемо $\triangle AMD$ та $\triangle MBC$. В цих трикутниках $AM = MB$ за умовою задачі, $\angle AMD = \angle MBC$ і $\angle MAD = \angle BMC$ за властивістю паралельних прямих ($DM \parallel CB$ і $AD \parallel MC$). Отже $\triangle AMD = \triangle MBC$ за другою ознакою рівності трикутників (за стороною і двома прилеглими до неї кутами). Звідси випливає, що $DM = OC = CB = x$ і $CM = OD = DA = y$, тобто $OB = 2x$, $OA = 2y$.

З трикутника ABO матимемо

$$\frac{OA}{OB} = \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta.$$

З геометричного змісту похідної $\operatorname{tg} \beta = y'$.

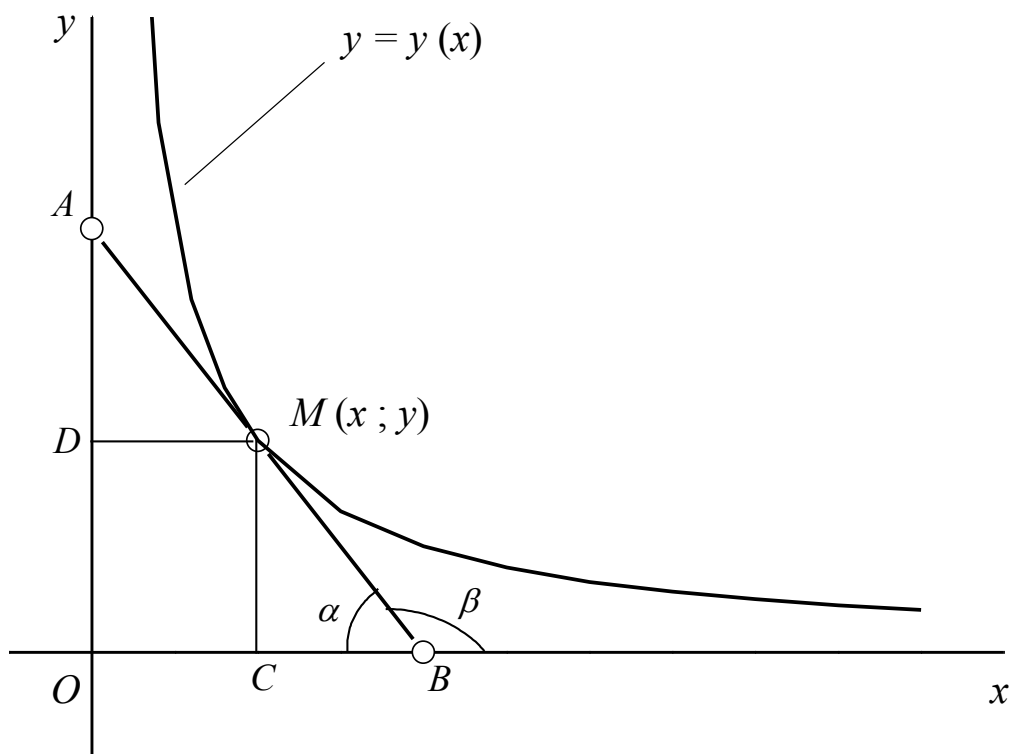


Рис. 9.1

Таким чином, одержимо наступне диференціальне рівняння

$$\frac{y}{x} = -y'.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними, тобто щоб дістати його розв'язок відокремлюємо змінні

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Тоді, після інтегрування, матимемо загальний розв'язок у вигляді

$$y = \frac{C}{x}, C \neq 0.$$

Отже, шукані криві – сім'я рівнобічних гіпербол, для яких осі координат служать асимптотами.

Задача 2. Довести, що крива $y = y(x)$ є параболою $y = Cx^2$ тоді і тільки тоді, коли вона має таку властивість: якщо через будь-яку її точку $M(x; y)$ ($x \neq 0$, $y \neq 0$) провести прямі, паралельні осям координат до перетину з ними, то крива поділить утворений прямокутник на дві фігури, площі яких відносяться, як 1:2, рахуючи від осі OX .

Розв'язання. Розглянемо випадок, коли довільна точка $M(x; y)$ кривої $y = y(x)$ лежить у першій координатній чверті (рис. 9.2). Позначимо через S_1 площу фігури, що прилягає до осі OX , а через S_2 – до осі OY .

З курсу математичного аналізу (геометричний зміст визначеного інтегралу) відомо, що

$$S_1 = \int_0^x y(x) dx, \quad S_2 = xy - S_1.$$

Оскільки за умовою задачі $S_2 = 2S_1$, маємо

$$3 \int_0^x y(x) dx = xy.$$

Диференціюючи останнє співвідношення за змінною x і враховуючи, що $y = y(x)$ і $\frac{d}{dx} \left[\int_0^x y(x) dx \right] = y(x)$ (властивість інтеграла зі змінною верхньою межею), дістаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$2y = xy'.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція $y = Cx^2$, $C > 0$. Що і треба було довести.

Аналогічне рівняння матимемо і для випадків, коли точка $M(x; y)$ лежить в інших чвертях (переконатися самостійно).

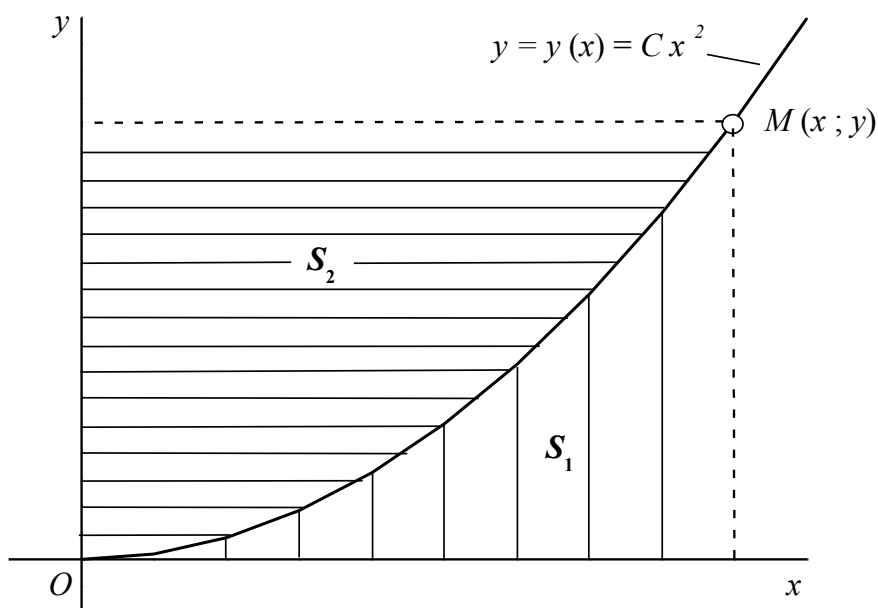


Рис. 9.2

Задача 3. Крива $y = y(x)$ проходить через точку $M_0(1; 2)$. Кожна дотична до цієї кривої перетинає пряму $y = 1$ у точці з абсцисою, що дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику. Знайти криву $y = y(x)$.

Розв'язання. Нехай $M(x; y)$ – довільна точка даної кривої. З курсу аналітичної геометрії відомо, що рівняння дотичної, що проведена до кривої $y = y(x)$ в точці $M(x; y)$, має вигляд

$$Y - y = y'(X - x),$$

де X, Y – змінні координати точок дотичної. За умовою задачі дотична проходить через точку з координатами $X = 2x, Y = 1$, отже одержуємо диференціальне рівняння

$$1 - y = xy',$$

яке задовольняє шукана крива. Відокремивши змінні і проінтегрувавши останнє рівняння, дістанемо загальний інтеграл у вигляді

$$y - 1 = \frac{C}{x}.$$

Шукана крива проходить через точку $M_0(1; 2)$, тому $C = 1$, отже остаточно матимемо рівняння шуканої кривої у вигляді

$$y = 1 + \frac{1}{x}.$$

9.2. Фізичні задачі

Розв'язуючи фізичну задачу за допомогою диференціального рівняння, можна діяти за такою схемою:

- ❖ визначити, з яким фізичним законом пов'язана дана задача;
- ❖ ввести незалежну змінну, шукану функцію, швидкість зміни цієї функції (тобто її похідну);
- ❖ використовуючи умову задачі, пов'язати всі введені величини, тобто скласти диференціальне рівняння досліджуваного процесу;
- ❖ виділити початкову умову, якщо це передбачено умовою задачі;
- ❖ розв'язати та дослідити складене диференціальне рівняння.

Задача 1. Матеріальна точка рухається вдовж прямої зі швидкістю, обернено пропорційною пройденому шляху. В початковий момент руху ($t = 0$) точка знаходилась на відстані s_0 від початку відліку шляху і мала швидкість v_0 . Визначити пройдений шлях і швидкість у момент t_1 після початку руху.

Розв'язання. Позначимо через $s = s(t)$ відстань точки від початку відліку в момент t (закон руху матеріальної точки). Тоді з урахуванням фізичного змісту похідної та за умовою задачі залежність величини s від часу t описується диференціальним рівнянням

$$\frac{ds}{dt} = \frac{k}{s},$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$s = \sqrt{2(kt + C)}.$$

З початкової умови $s(0) = s_0$, матимемо $C = \frac{s_0^2}{2}$, отже

$$s = \sqrt{2kt + s_0^2}$$

Диференціюючи останнє рівняння за змінною t , дістанемо швидкість руху точки в момент t

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{k}{\sqrt{2kt + s_0^2}}.$$

За умовою задачі $v(0) = v_0$, отже можемо визначити коефіцієнт пропорційності k :

$$k = v_0 s_0$$

Таким чином, відстань $s(t)$ і швидкість $v(t)$ змінюються у часі за законом

$$s(t) = \sqrt{s_0(2v_0 t + s_0)}, \quad v(t) = v_0 \sqrt{\frac{s_0}{2v_0 t + s_0}}.$$

Нехай $s_0 = 3$ м, $v_0 = 15$ м/с, $t_1 = 30$ с. Тоді через 30 с після початку руху маємо

$$s(30) = \sqrt{3 \cdot (2 \cdot 15 \cdot 30 + 3)} \approx 52,048 \text{ м},$$

$$v(t) = 15 \cdot \sqrt{\frac{3}{2 \cdot 15 \cdot 30 + 3}} \approx 0,86 \text{ м/с}.$$

Отже, через 30 с після початку руху швидкість точки буде дорівнювати 0,86 м/с і точка пройде відстань $s(30) - s(0) = 49,048$ м.

Задача 2. Човен уповільнює свій рух за рахунок дії опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна дорівнює 2 м/с, а його швидкість через 4 с дорівнює 1 м/с. Через який час швидкість човна буде дорівнювати 0,25 м/с? Яку відстань може пройти човен до повної зупинки?

Розв'язання. Нехай $v = v(t)$ – швидкість човна в момент t . Згідно другому закону Ньютона

$$m \frac{dv}{dt} = F(t),$$

де $\frac{dv}{dt}$ – прискорення човна; $F(t)$ – сила, що діє на човен; m – маса човна.

За умовою задачі $F(t) = -kv(t)$, де k – коефіцієнт пропорційності, а знак мінус вказує на те, що сила спрямована проти руху (на зменшення швидкості). Отже, диференціальне рівняння руху човна має вигляд

$$m \frac{dv}{dt} = -kv.$$

Його загальний розв'язок дістанемо у вигляді

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

За умовою задачі $v(0) = 2$, тому $C = 2$ і тоді $v(t) = 2e^{-\frac{k}{m}t}$. Крім того нам відомо, що $v(4) = 1$, тобто можна визначити величину $\frac{k}{m}$:

$$1 = 2e^{-\frac{k}{m} \cdot 4} \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{\ln 2}{4}.$$

Таким чином, швидкість човна змінюється за законом

$$v(t) = 2^{1-\frac{t}{4}}.$$

Час T , через який швидкість човна буде дорівнювати 0,25 м/с, одержимо з рівняння $0,25 = 2^{1-\frac{T}{4}}$, звідки $T = 12$ с.

Відстань, яку човен може пройти до повної зупинки, обчислюємо за формулою

$$s(t) = \int_0^t v(x) dx = \int_0^t 2^{1-\frac{x}{4}} dx = \frac{8}{\ln 2} \left(1 - 2^{-\frac{t}{4}} \right).$$

Звідки видно, що човен може пройти відстань, не більшу чим $\frac{8}{\ln 2} \approx 11,5$ м.

Задача 3. Під час замикання електричного кола в ньому виникає електрорушійна сила (ЕРС) самоіндукції, яка пропорційна швидкості зростання сили струму I . Знайти закон зміни сили струму, якщо ЕРС джерела струму є стала величина і вона дорівнює E .

Розв'язання. З курсу фізики відомо, що ЕРС самоіндукції обчислюється за формулою

$$E_1 = L \frac{dI}{dt},$$

де L – коефіцієнт самоіндукції.

У свою чергу напруга в електричному колі змінюється за законом

$$V = E - E_1 = E - L \frac{dI}{dt}.$$

За законом Ома $I = \frac{V}{R}$ або $I = \frac{E - L \frac{dI}{dt}}{R}$, де R – електричний опір.

Отже, після деяких перетворень одержимо диференціальне рівняння задачі

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L}.$$

Оскільки $\frac{R}{L}$ і $\frac{E}{L}$ – сталі, маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремивши змінні і проінтегрувавши, дістанемо загальний інтеграл у вигляді

$$RI = E - Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Задача 4. Куля входить в дошку товщиною 10 см із швидкістю 200 м/с, а вилітає з дошки, пробивши її, із швидкістю 50 м/с. Визначити час руху кулі в дошці, якщо опір рухові кулі в дошці пропорційний квадрату її швидкості.

Розв'язання. Нехай m – маса кулі; $s = s(t)$ – відстань, що пройдена кулею за час t , який відлічується від моменту входу її в дошку; $F(t)$ – сила опору дошки, що діє на кулю. Тоді з урахуванням другого закону Ньютона

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = m\ddot{s} = F(t).$$

За умовою задачі $F(t) = -kv^2(t) = -k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -k\dot{s}^2$, де k – коефіцієнт пропорційності, а знак мінус вказує на те, що сила спрямована проти руху (на зменшення швидкості); $v = v(t)$ – швидкість кулі. Отже, диференціальне рівняння руху кулі через дошку матиме вигляд

$$m\ddot{s} = -k\dot{s}^2$$

або з урахуванням, що $\dot{s} = v$ а $\ddot{s} = \dot{v}$, одержимо

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2.$$

Звідси дістанемо загальний розв'язок у вигляді

$$v = \frac{m}{kt - mC_1},$$

який виражає залежність швидкості руху кулі через дошку від часу.

З урахуванням початкової умови $v(0) = 200 \text{ м/с}$ (за умовою задачі), матимемо $C_1 = -0,005$, тобто

$$v = \frac{m}{kt + 0,005m}. \quad (9.1)$$

Тепер знайдемо закон $s = s(t)$ за яким змінюється відстань, що проходить куля в дошці

$$s(t) = \int v(t) dt = \int \frac{m}{kt + 0,005m} dt = \frac{m}{k} \ln|kt + 0,005m| + C_2.$$

З початкової умови $s(0) = 0$ (за умовою задачі) впливає $C_2 = -\frac{m}{k} \ln|0,005m|$, тобто остаточно дістанемо

$$s = \frac{m}{k} \ln \left| \frac{kt}{0,005m} + 1 \right|. \quad (9.2)$$

Щоб відповісти на запитання задачі, підставимо $v = 50 \text{ м/с}$ у співвідношення (9.1), а $s = 0,1 \text{ м}$ у (9.2), одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{At + 0,005} = 50, \\ \frac{1}{A} \ln \left(\frac{At}{0,005} + 1 \right) = 0,1; \end{cases}$$

з двома невідомими $A = \frac{k}{m}$ і t , розв'язавши яку, дістанемо

$$A = 10 \ln 4, \quad t = 0,001 \text{ с}.$$

Таким чином, при заданих умовах, час руху кулі в дошці дорівнює $0,001 \text{ с}$.

Задача 5. Ланцюг, що звисає на гачку, починає сповзати в момент часу, коли один його кінець має довжину 12 м , а інший – 8 м . За який час ланцюг сповзе повністю?

Розв'язання. Позначимо через $x = x(t)$ довжину довшого кінця ланцюга в момент часу t . Тоді $(20 - x(t))$ – довжина коротшого кінця, а їхні маси відповідно становитимуть $m_1 = x\gamma$ і $m_2 = (20 - x)\gamma$, де γ – густина матеріалу, з якого зроблено ланцюг.

Рух відбувається завдяки дії двох сил $F_1 = m_1g$ та $F_2 = m_2g$. Тоді за законом Ньютона рівняння руху ланцюга має вигляд

$$m\ddot{x} = m_1g - m_2g,$$

де $m = 20\gamma$ – маса всього ланцюга; $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$ – прискорення руху в момент часу t ; $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення сили ваги.

Підставимо в рівняння руху відомі величини і скоротимо на γ , одержимо

$$\ddot{x} - 0,981x = -9,81.$$

Це лінійне неоднорідне (із спеціальною правою частиною) диференціальне рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами (розділ 4). Загальним розв'язком x_{30} відповідного однорідного рівняння є функція

$$x_{30} = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$$

а частинний розв'язок $x_{\text{чн}}$, одержаного неоднорідного рівняння, має вигляд

$$x_{\text{чн}} = 10.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння руху ланцюга дістанемо у вигляді

$$x = x_{30} + x_{\text{чн}} = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 10.$$

З умови задачі визначаємо початкові умови, а саме: $x(0) = 12$ (довжина довшого кінця) та $\dot{x}(0) = 0$, оскільки ланцюг перебував у стані спокою до цього моменту.

Підставляючи першу умову в загальний розв'язок, дістаємо $C_1 + C_2 = 2$. Тепер знаходимо $\dot{x} = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$ і, підставляючи сюди другу умову, маємо $C_1 = C_2$. Отже, $C_1 = C_2 = 1$, і частинний розв'язок рівняння руху ланцюга має вигляд

$$x(t) = e^t + e^{-t} + 10$$

Ланцюг сповзе повністю, коли $x(t) = 20$. Тоді, підставивши це значення у частинний розв'язок, одержимо рівняння для визначення часу t

$$10 = e^t + e^{-t}.$$

Звідси, увівши позначення $y = e^t$, дістанемо квадратне рівняння

$$y^2 - 10y + 1 = 0,$$

що має два корені $y_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$, з яких тільки перший задовольняє умову задачі, оскільки при $y_2 = 5 - 2\sqrt{6}$ одержуємо $t < 0$. Отже, $t = \ln(5 + 2\sqrt{6}) \approx 2,292$, тобто ланцюг сповзе повністю приблизно через 2 с.

Підставимо в рівняння руху відомі величини і скоротимо на γ , одержимо

$$\ddot{x} - 0,981x = -9,81.$$

Це лінійне неоднорідне (із спеціальною правою частиною) диференціальне рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами (розділ 4). Загальним розв'язком x_{30} відповідного однорідного рівняння є функція

$$x_{30} = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$$

а частинний розв'язок $x_{\text{чн}}$, одержаного неоднорідного рівняння, має вигляд

$$x_{\text{чн}} = 10.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння руху ланцюга дістанемо у вигляді

$$x = x_{30} + x_{\text{чн}} = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 10.$$

З умови задачі визначаємо початкові умови, а саме: $x(0) = 12$ (довжина довшого кінця) та $\dot{x}(0) = 0$, оскільки ланцюг перебував у стані спокою до цього моменту.

Підставляючи першу умову в загальний розв'язок, дістаємо $C_1 + C_2 = 2$. Тепер знаходимо $\dot{x} = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$ і, підставляючи сюди другу умову, маємо $C_1 = C_2$. Отже, $C_1 = C_2 = 1$, і частинний розв'язок рівняння руху ланцюга має вигляд

$$x(t) = e^t + e^{-t} + 10$$

Ланцюг сповзе повністю, коли $x(t) = 20$. Тоді, підставивши це значення у частинний розв'язок, одержимо рівняння для визначення часу t

$$10 = e^t + e^{-t}.$$

Звідси, увівши позначення $y = e^t$, дістанемо квадратне рівняння

$$y^2 - 10y + 1 = 0,$$

що має два корені $y_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$, з яких тільки перший задовольняє умову задачі, оскільки при $y_2 = 5 - 2\sqrt{6}$ одержуємо $t < 0$. Отже, $t = \ln(5 + 2\sqrt{6}) \approx 2,292$, тобто ланцюг сповзе повністю приблизно через 2 с.

9.3. Задачі механіки

Задача 1 (задача про гармонічні коливання). Тіло маси m коливається під дією пружної сили розтягання – стиску пружини, яка дорівнює cs , де c – коефіцієнт жорсткості пружини; $s = s(t)$ – закон руху тіла (рис. 9.3). Нехтуючи силами опору рухові тіла, знайти закон руху тіла, якщо відомі такі

початкові умови: $s(0) = A$, $\dot{s}(0) = v_0 = 0$, де A – амплітуда коливань; v_0 – початкова швидкість.

Розв’язання. З фізичного змісту похідної випливає, що у довільний момент часу t швидкість тіла $v(t) = \dot{s}(t)$, а прискорення $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$. За другим законом Ньютона $m\ddot{s} = -cs$ або, якщо позначити $\omega^2 = \frac{c}{m}$, дістанемо

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0. \quad (9.3)$$

Одержане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням другого порядку з сталими коефіцієнтами.

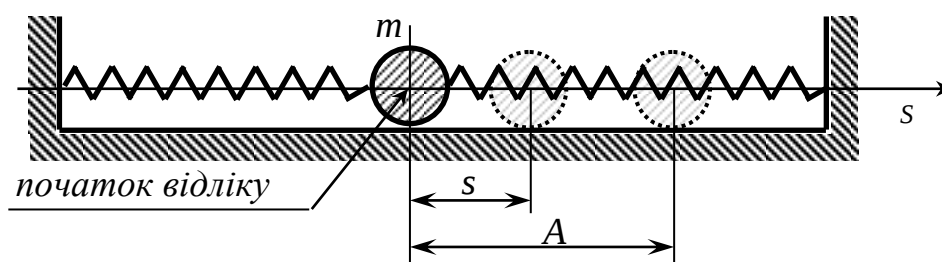


Рис. 9.3

Характеристичне рівняння для (9.3) має вигляд

$$k^2 + \omega^2 = 0.$$

Його корени $k_{1,2} = \pm \omega i$. Звідси одержимо загальний розв’язок рівняння (9.3)

$$s = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Тоді

$$\dot{s} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t.$$

З початкових умов випливає $C_1 = A$, $C_2 = 0$. Отже, шуканий закон руху тіла матиме вигляд

$$s = A \cos \omega t.$$

У цьому випадку коливання називають гармонічним.

Задача 2 (задача про биття вала). Для швидкого обертання тонкого і довгого вала характерне, як показує досвід, таке явище: при збільшенні кутової швидкості ω вона досягає такого значення $\omega = \omega_1$, при якому вал не зберігає прямолінійної форми, а починає, як кажуть, бити; якщо і далі збільшувати швидкість $\omega > \omega_1$, то биття спочатку припиняється, а потім знову виникає при $\omega = \omega_2 > \omega_1$ і т. д. Швидкості ω_1 , ω_2 , ... називають критичними швидкостями обертання вала. Обчислити ці швидкості.

Розв'язання. З курсу опору матеріалів відомо, що величина y прогину вала, закріпленого в точках $x = 0$ і $x = l$, задовольняє рівняння

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{P\omega^2}{g} y,$$

де E – коефіцієнт пружності (модуль Юнга); I – момент інерції поперечного перерізу вала; P – вага одиниці довжини вала; g – прискорення сили тяжіння.

Поклавши

$$q = \sqrt[4]{\frac{P\omega^2}{gEI}}, \quad (9.4)$$

дістанемо диференціальне рівняння (лінійне однорідне четвертого порядку з сталими коефіцієнтами)

$$y^{IV} - q^4 y = 0. \quad (9.5)$$

Його характеристичне рівняння $k^4 - q^4 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm q$, $k_{3,4} = \pm qi$, тому загальний розв'язок диференціального рівняння (9.5) має вигляд

$$y = C_1 e^{qx} + C_2 e^{-qx} + C_3 \cos qx + C_4 \sin qx.$$

На кінцях вал закріплено, тому маємо початкові умови

$$y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0,$$

які приводять до системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0, \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} + C_3 \cos ql + C_4 \sin ql = 0, \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} - C_3 \cos ql - C_4 \sin ql = 0. \end{cases} \quad (9.6)$$

Розв'язок $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ цієї системи відповідає випадку, коли вал зберігає прямолінійну форму, тобто $y = 0$.

Знайдемо тепер ті значення q , для яких система рівнянь (9.6) має ненульові розв'язки. З перших двох рівнянь цієї системи маємо $C_1 = -C_2$, $C_3 = 0$. Підставляючи ці значення в третє та четверте рівняння системи (9.6), одержуємо

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0, \quad C_4 \sin ql = 0.$$

Оскільки $C_4 \neq 0$, то $\sin ql = 0$, звідки

$$q = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in N.$$

Скориставшись значенням q , з (9.4) знайдемо шукані критичні швидкості

$$\omega_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EIg}{P}}$$

Задача 3 (задача Ламе). Задача про визначення напружено-деформовано-го стану в товстостінній трубі, що знаходиться під дією рівномірно розподіленого внутрішнього і зовнішнього тиску, виникла спочатку у зв'язку з розрахунком артилерійських стовбурів і зветься задачею Ламе, за іменем французького математика і механіка – Габріеля Ламе, який одержав її розв'язок. Задачі такого роду зустрічаються і в інших технічних задачах (трубопроводи високого тиску, циліндри компресорів, формовка труб продавлюванням через матрицю і т. ін.)

Нехай нескінченно довга кругла труба (або труба, що упирається торцями в жорсткі плити) з внутрішнім радіусом a і зовнішнім радіусом b знаходиться під дією рівномірно розподіленого внутрішнього тиску P_a і зовнішнього тиску P_b (рис. 9.4). Треба визначити напружено-деформований стан цієї труби.

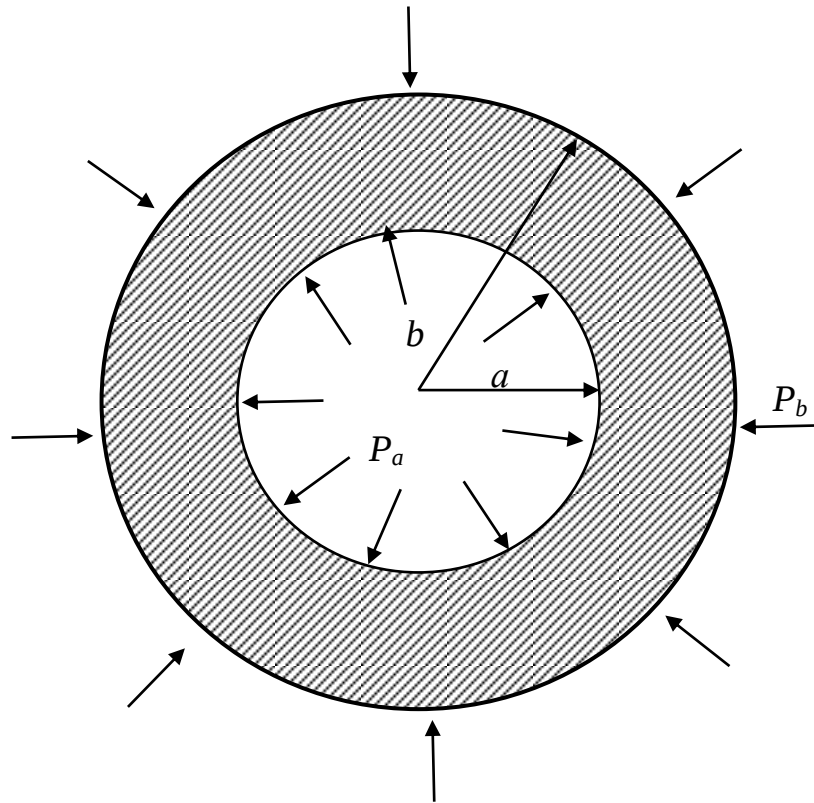


Рис. 9.4

Розв'язання. Внаслідок симетрії форми труби ясно, що всі матеріальні точки тіла труби будуть переміщатися в напрямку радіуса. Позначимо це переміщення через u . Оскільки точки труби не можуть переміщуватися в напрямку осі труби, який ми приймемо за напрямок осі z , і оскільки зовнішні навантаження розподілені рівномірно, то деформації в усіх перерізах труби, що перпендикулярні до осі z , однакові. Такий деформований стан, що не залежить

від z , причому переміщення відбуваються у площині, перпендикулярній до осі z , називають у механіці деформівного твердого тіла плоским деформованим станом.

Введемо циліндричну систему координат r, θ, z . На рис. 9.5 показаний елемент $ABCD$ труби довжиною 1 в напрямку осі z , обмежений циліндричними поверхнями радіусів r і $r + dr$ і двома радіальними перерізами OB і OC , що утворюють кут $d\phi$. Цей елемент знаходиться в рівновазі під дією всіх прикладених до нього сил. Напруження на гранях AB і CD позначимо через σ_θ , а на гранях AD і BC – через σ_r і $\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr$ відповідно. Оскільки за умовою задачі P_a і P_b означають тиск на внутрішню і зовнішню поверхні труби, то граничні умови матимуть вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -P_a \quad \text{при } r = a, \\ \sigma_r &= -P_b \quad \text{при } r = b.\end{aligned}\tag{9.7}$$

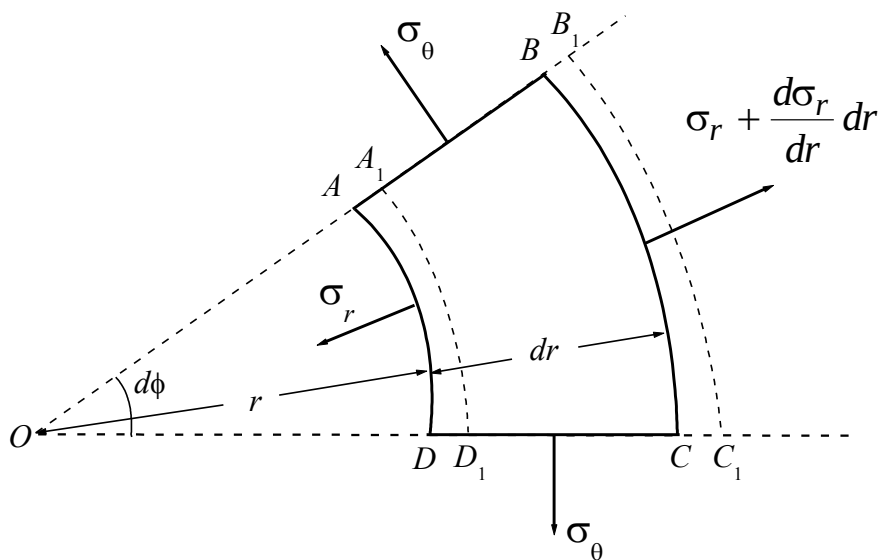


Рис. 9.5

Встановимо зв'язок між σ_r і σ_θ . На грані AB і CD діють сили $\sigma_\theta \cdot dr \cdot 1$. Сума їх проекцій на напрямок OB дорівнює $-\sigma_\theta dr \sin(d\phi)$, або $-\sigma_\theta dr d\phi$, якщо вважати $\sin(d\phi) \cong d\phi$.

На грані AD і BC діють сили $r\sigma_r d\phi$ і $\left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr\right)(r + dr)d\phi$.

Проектуючи їх на напрямок OB і приймаючи $\cos \frac{d\phi}{2} \cong 1$, дістанемо величину проекцій рівнодійної у вигляді

$$\sigma_r dr d\varphi + \frac{d\sigma_r}{dr} r dr d\varphi,$$

якщо знехтуємо виразом

$$\frac{d\sigma_r}{dr} (dr)^2 d\varphi.$$

Прирівнюючи до нуля суму проекцій всіх сил на напрямок OB , прикладених до елемента $ABCD$, після скорочення на $dr d\varphi$ дістаємо рівняння

$$\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} r - \sigma_\theta = 0. \quad (9.8)$$

Якщо переміщення точки A позначити через u , то переміщення точки B виразиться як

$$u + \frac{du}{dr} dr.$$

Елемент радіуса dr дістане подовження $\frac{du}{dr} dr$, внаслідок чого відносне подовження в радіальному напрямку буде $e_r = \frac{du}{dr}$. Після деформації дуга AD займе положення A_1D_1 (рис. 9.5), причому

$$\frac{A_1D_1}{AD} = \frac{OA_1}{OA}.$$

Отже, відносне подовження

$$e_\theta = \frac{A_1D_1 - AD}{AD} = \frac{OA_1 - OA}{OA} = \frac{r + u - r}{r} = \frac{u}{r}.$$

Як бачимо, елемент $ABCD$ розтягується в двох перпендикулярних напрямках. Для такого розтягу, як відомо з механіки деформівного твердого тіла, використовуються такі залежності (узагальнений закон Гука):

$$\sigma_\theta = \frac{E(e_\theta + \mu e_r)}{1 - \mu^2},$$

$$\sigma_r = \frac{E(e_r + \mu e_\theta)}{1 - \mu^2},$$

де E – модуль Юнга матеріалу труби, μ – коефіцієнт Пуассона. Замінюючи e_θ і e_r їх значеннями, дістанемо

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right),$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right). \quad (9.9)$$

Тепер знайдемо похідну

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{d^2u}{dr^2} + \mu \frac{r \frac{du}{dr} - u}{r^2} \right).$$

Підставимо значення σ_θ , σ_r і $\frac{d\sigma_r}{dr}$ у рівняння (9.8). Після спрощення матимемо диференціальне рівняння Ейлера (п. 4.1)

$$r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = 0, \quad (9.10)$$

яке є окремим випадком рівняння (9.8).

Шукатиме розв'язок рівняння (9.10) у вигляді

$$u = r^k,$$

тоді одержимо характеристичне рівняння $k^2 - 1 = 0$. Звідси $k_{1,2} = \pm 1$ і загальним інтегралом рівняння (9.10) є функція

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (9.11)$$

де C_1 , C_2 – довільні сталі. Для їх визначення знайдемо

$$\frac{du}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2}.$$

Вирази для u і $\frac{du}{dr}$ підставимо у формули (9.9), матимемо

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1(1+\mu) + \frac{C_2}{r^2} (1-\mu) \right], \\ \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1(1+\mu) - \frac{C_2}{r^2} (1-\mu) \right]. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Використовуючи для σ_r граничні умови (9.7), дістанемо

$$\begin{aligned} -P_a &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1(1+\mu) - \frac{C_2}{a^2} (1-\mu) \right], \\ -P_b &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1(1+\mu) - \frac{C_2}{b^2} (1-\mu) \right]. \end{aligned}$$

Звідси

$$C_1 = \frac{(1 - \mu)(a^2 P_a - b^2 P_b)}{E(b^2 - a^2)},$$

$$C_2 = \frac{(1 + \mu)(P_a - P_b)a^2 b^2}{E(b^2 - a^2)}.$$

Підставляючи значення C_1 і C_2 в (9.11), (9.12), одержимо формули для визначення напружено-деформованого стану труби

$$u = \frac{1 - \mu}{E} \frac{a^2 P_a - b^2 P_b}{b^2 - a^2} r + \frac{(1 + \mu)(P_a - P_b)a^2 b^2}{E r(b^2 - a^2)},$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 P_a - b^2 P_b}{b^2 - a^2} + \frac{(P_a - P_b)a^2 b^2}{r^2(b^2 - a^2)},$$

$$\sigma_r = \frac{a^2 P_a - b^2 P_b}{b^2 - a^2} - \frac{(P_a - P_b)a^2 b^2}{r^2(b^2 - a^2)}. \quad (9.13)$$

При розв'язуванні технічних задач важливе значення має візуалізація одержаного розв'язку диференціального рівняння. Тому для наочності на рис. 9.6 наведені епюри радіального і дотичного напружень, що одержані за формулами (9.13) при наступних даних: $a = 3.8$ см, $b = 10$ см, $P_a = 1500$ кг/см², $P_b = 500$ кг/см².

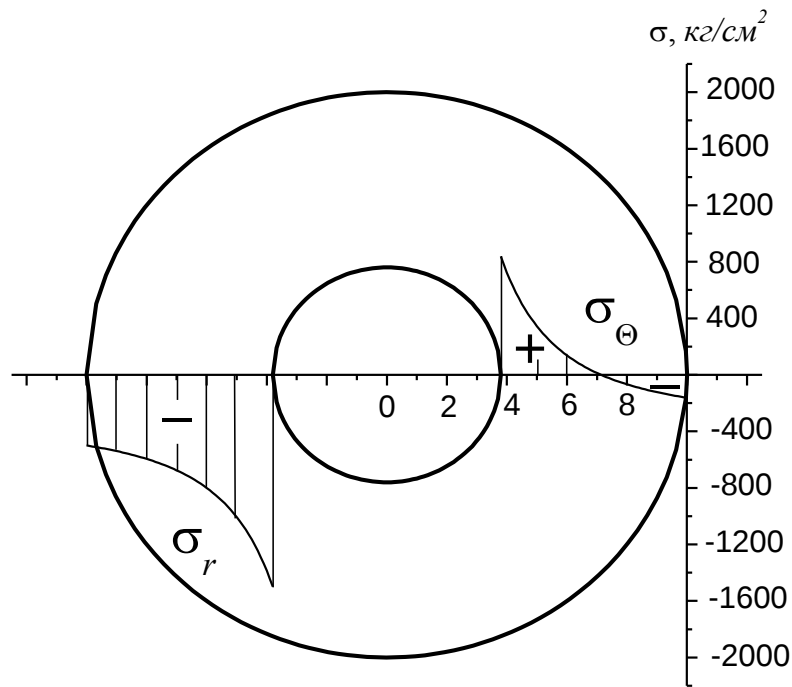


Рис. 9.6

Проведемо дослідження одержаного розв'язку (9.13). Для цього розглянемо деякі окремі випадки.

Циліндр навантажений внутрішнім тиском. В цьому випадку $P_b = 0$, а внутрішній тиск візьмемо $P_a = 500 \text{ кг/см}^2$. Співвідношення для напружень з (9.13) приймуть вигляд

$$\sigma_{\theta} = \frac{a^2 P_a}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right), \quad \sigma_r = \frac{a^2 P_a}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right). \quad (9.14)$$

На рис. 9.7 показані епюри зміни радіального і дотичного напружень за товщиною циліндра при навантаженні тільки внутрішнім тиском. При цьому, дотичне напруження є розтяжним, а радіальне – стискним. На внутрішній поверхні σ_{θ} досягає найбільшого значення

$$\sigma_{\theta}|_{r=a} = P_a \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2},$$

а радіальне дорівнює $[-P_a]$.

На зовнішній поверхні

$$\sigma_{\theta}|_{r=b} = P_a \frac{2a^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_r|_{r=b} = 0.$$

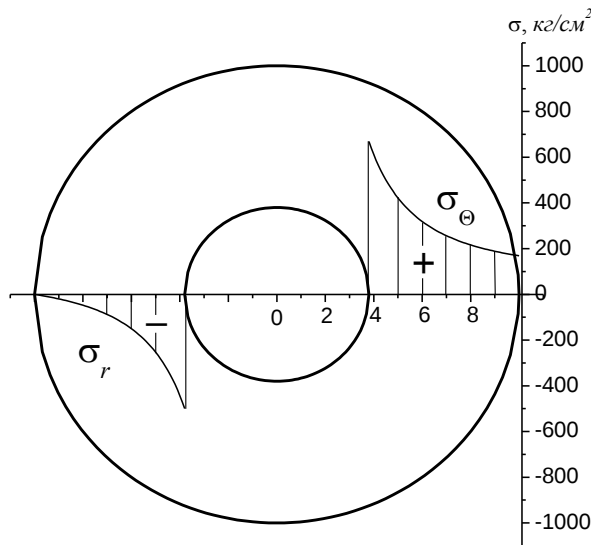


Рис. 9.7

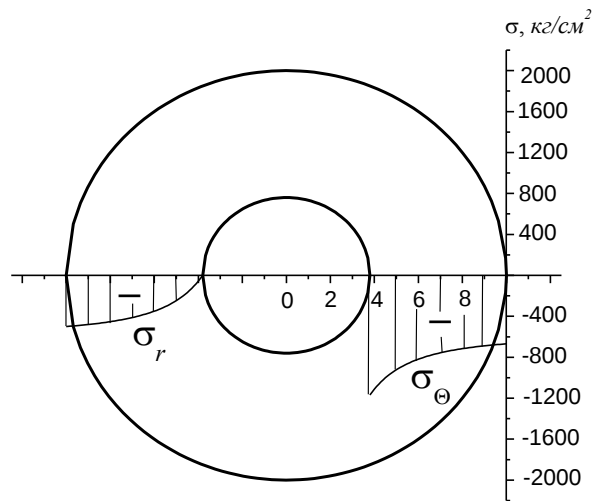


Рис. 9.8

На практиці дуже важливе значення має питання про зміну напружень σ_r і σ_θ у залежності від зміни товщини циліндра.

Радіальне напруження σ_r на внутрішній поверхні дорівнює $[-P_a]$, а на зовнішній – нулю, незалежно від товщини циліндра. Для циліндра з малою товщиною стінки дотичні напруження розподілені за товщиною майже рівномірно, а радіальні – малі у порівнянні з дотичними тією ж мірою, у якій товщина мала у порівнянні з радіусом.

Якщо товщина циліндра збільшується, то найбільші напруження в ньому при постійному тиску зменшуються, але не безмежно. У разі коли $b \rightarrow \infty$, тобто коли циліндр має нескінченно велику товщину, співвідношення (9.14) матимуть вигляд

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 P_a}{r^2}, \quad \sigma_r = -\frac{a^2 P_a}{r^2}.$$

Це означає, що для циліндра нескінченної товщини радіальне напруження в будь-якій точці дорівнює дотичному.

Циліндр навантажений зовнішнім тиском. В цьому випадку $P_a = 0$, а зовнішній тиск візьмемо $P_b = 1500 \text{ кг/см}^2$. Співвідношення для напружень з (9.13) приймуть вигляд

$$\sigma_\theta = -\frac{b^2 P_b}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \sigma_r = -\frac{b^2 P_b}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right).$$

Епюри напружень для цього випадку зображені на рис. 9.8. При цьому, і дотичне і радіальне напруження є стискними. На внутрішній поверхні циліндра

$$\sigma_{\theta}|_{r=a} = -P_b \frac{2b^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_r|_{r=a} = 0;$$

на зовнішній поверхні

$$\sigma_{\theta}|_{r=b} = -P_b \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_r|_{r=b} = -P_b.$$

Якщо внутрішнього отвору немає, тобто $a = 0$, то напруження в циліндрі розподілені рівномірно: $\sigma_r = \sigma_{\theta} = -P_b$.

Задача 4 (диференціальне рівняння пружної лінії балки). У механіці деформівного твердого тіла *балкою* називають брус із сталим поперечним перерізом, який працює на згин. Існують різні типи балок (залежно від способів їх кріплення або опор) і різні способи прикладення до них зовнішніх навантажень, але у будь-якому разі під дією сил, прикладених до балки у вертикальній площині, балка прогинається і її вісь симетрії буде викривлятися. Викривлену вісь симетрії називають *пружною лінією балки*. Визначення форми цієї лінії – одна з основних задач теорії пружності, оскільки саме рівняння пружної лінії дозволяє проводити розрахунок балок на жорсткість, яка характеризується прогином і кутом повороту.

Розглянемо горизонтально розміщену однорідну балку OA (рис. 9.9). Нехай її вісь симетрії розміщена вздовж осі Ox . Вісь Oy спрямована вниз від точки O . Під дією зовнішніх сил $F_1, F_2, \dots, F_k, \dots$ і ваги балки, якщо вона велика, вісь симетрії згинається, тобто пружна лінія балки змінює свою форму (рис. 9.10). Зміщення у пружної лінії від осі Ox називається *прогином балки*, або стрілкою прогину в положенні x , а $y' = \theta$ – називають *кутом повороту*.

Таким чином, якщо відомо рівняння пружної лінії, то завжди можна знайти прогин балки і кут повороту. Розглянемо як це можна виконати практично.

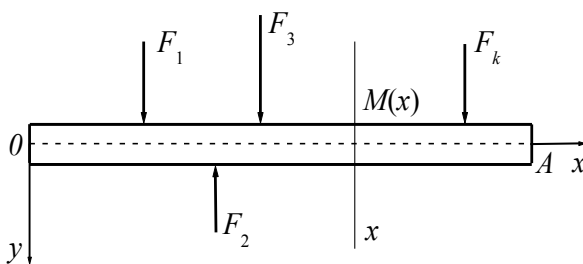


Рис. 9.9

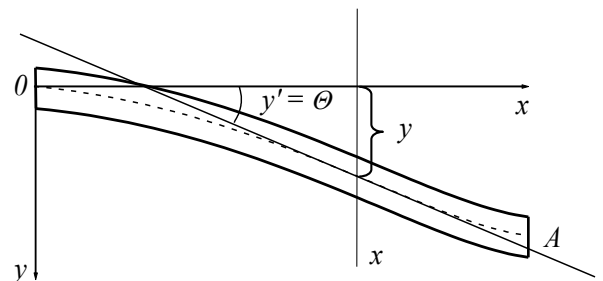


Рис. 9.10

Розв'язання. Позначимо через $M(x)$ момент згину у вертикальному поперечному перерізі балки з координатою x . Момент згину балки визначається

як алгебраїчна сума моментів тих сил, що діють з одного боку балки в положенні x . при обчисленні моментів вважатимемо, що сили, які діють на балку знизу вверху, дають додатні моменти, а сили, що діють зверху вниз, дають від'ємні моменти.

З теорії опору матеріалів відомо, що момент згину в перерізі x залежить від радіуса кривизни пружної лінії

$$EI \frac{y''}{\sqrt{[1 + (y')^2]^3}} = M(x), \quad (9.15)$$

де E – модуль пружності Юнга, який залежить від матеріалу; I – момент інерції поперечного перерізу балки в положенні x відносно горизонтальної прямої, що проходить через центр ваги поперечного перерізу. Добуток EI називають жорсткістю при згині; її величину вважатимемо сталою.

Припустимо, що балка має малий згин, що часто буває на практиці. Тоді кутовий коефіцієнт y' пружної лінії, тобто кут повороту буде малий, а тому замість рівняння (9.15) можна наближено розглядати рівняння

$$EI y'' = M(x). \quad (9.16)$$

Щоб показати, як на практиці використовується це рівняння, розглянемо таку задачу.

Горизонтальна однорідна стальна балка довжиною l лежить на двох шарнірних опорах і згинається під дією рівномірно розподіленого навантаження q (рис. 9.11). Знайти рівняння пружної лінії балки, максимальний згин і максимальний кут повороту.

Оскільки балка двохопорна, то кожна з опор дає спрямовану вверху реакцію, що дорівнює $\frac{ql}{2}$. Згинаючим моментом $M(x)$ є алгебраїчна сума моментів сил що діють на балку з одного боку від точки A .

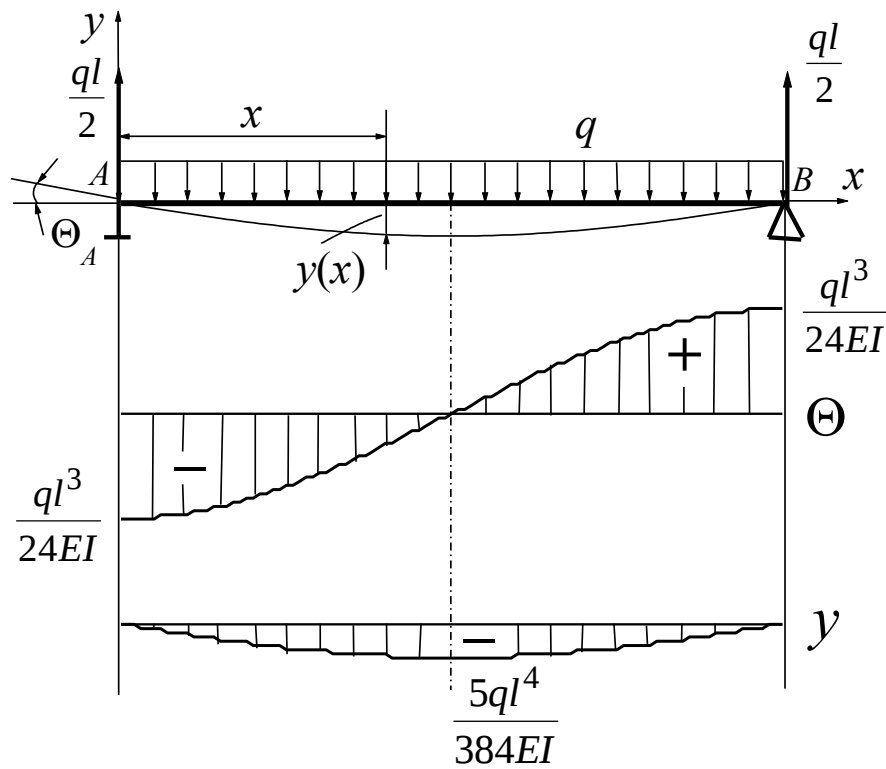


Рис. 9.11

У перерізі x від точки A сила реакції опори $\frac{ql}{2}$ діє на балку знизу вгору і утворює додатний момент $\frac{ql}{2}x$. Рівномірно розподілене навантаження q , яке діє уздовж x , може бути замінено (відомо з курсу опору матеріалів) зосередженою силою qx , що діє на відстані $\frac{x}{2}$ від точки A зверху вниз і утворює від'ємний момент $-qx \frac{x}{2}$. Таким чином, сумарний згинаючий момент $M(x)$, що діє на балку у перерізі x задається формулою

$$M(x) = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}.$$

Тоді диференціальне рівняння пружної лінії балки (9.16) прийме вигляд

$$EIy'' = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}.$$

Інтегруючи двічі, дістанемо

$$\theta(x) = y' = \frac{ql}{4EI}x^2 - \frac{q}{6EI}x^3 + C_1,$$

$$y(x) = \frac{ql}{12EI} x^3 - \frac{q}{24EI} x^4 + C_1 x + C_2.$$

Враховуючи, що на кінцях A ($x = 0$) і B ($x = l$) балка не згинається, для знаходження сталих C_1 і C_2 скористаємося граничними умовами

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0.$$

З першої умови дістанемо $y(0) = C_2 = 0$; з другої умови матимемо

$$C_1 = -\frac{ql^3}{24EI}.$$

Підставивши значення C_1 і C_2 у вирази для $\theta(x)$ і $y(x)$, одержимо рівняння кута повороту і рівняння пружної лінії балки у вигляді

$$\theta(x) = -\frac{ql^3}{24EI} \left(1 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right),$$

$$y(x) = -\frac{ql^3 x}{24EI} \left(1 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right).$$

Епюри $\theta(x)$ і $y(x)$ наведені на рис. 9.11. Максимальний згин (стрілка прогину) буде посередині прольоту

$$y_{\max} \left(\frac{l}{2} \right) = -\frac{5ql^4}{384EI}.$$

Максимальні значення кута повороту будуть на опорах

$$\theta(0) = \theta_A = -\frac{ql^3}{24EI} = -\theta_B.$$

При $q = 10 \text{ Н/м}$ і $l = 1 \text{ м}$: $y_{\max}(0.5) = -7.812 \text{ мм}$, $\theta(0) = \theta_A = -0.025$.

Задача 5 (диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки). У теоретичній механіці *невільною матеріальною точкою* називають матеріальну точку на яку крім активних сил діють сили реакцій зв'язків. Задача про рух невільної матеріальної точки зводиться до системи трьох диференціальних рівнянь другого порядку.

Нехай точка M рухається по гладкій площині, що відсікає на осях координат відрізки однакової довжини a . На точку діє сила $\vec{F} = -k\vec{r}$, де k – коефіцієнт пропорційності, а $\vec{r}$ – радіус-вектор точки M відносно початку координат. У початковий момент часу ($t = 0$) точка M мала координати $x_0 = a$, $y_0 = z_0 = 0$ і перебувала у спокою, тобто $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$. Визначити закон руху точки M і реакцію площини (рис. 9.12).

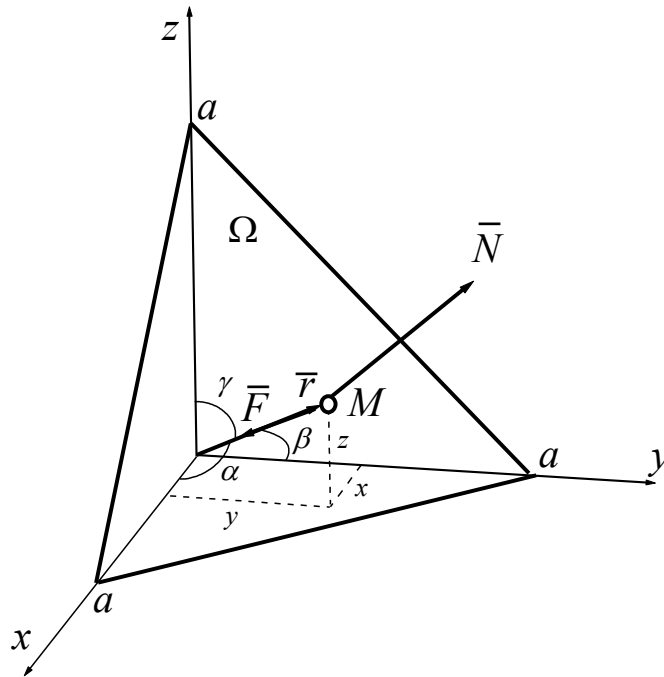


Рис. 9.12

Розв'язання. У даному випадку ми маємо рух невільної точки, що рухається по заданій площині Ω , рівняння якої має вигляд

$$x + y + z = a. \quad (9.17)$$

Це рівняння називають ще рівнянням зв'язків. Як відомо з курсу теоретичної механіки, для розв'язування поставленої задачі до рівняння (9.17) треба додати основні рівняння динаміки точки, які в проекціях на осі координат мають вигляд

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \bar{F}_x + \bar{N}_x, \\ m\ddot{y} = \bar{F}_y + \bar{N}_y, \\ m\ddot{z} = \bar{F}_z + \bar{N}_z, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k|\bar{r}| \cos \alpha + |\bar{N}| \cos \alpha_1, \\ m\ddot{y} = -k|\bar{r}| \cos \beta + |\bar{N}| \cos \beta_1, \\ m\ddot{z} = -k|\bar{r}| \cos \gamma + |\bar{N}| \cos \gamma_1. \end{cases} \quad (9.18)$$

З рис. 9.12 видно, що

$$|\bar{r}| \cos \alpha = x, \quad |\bar{r}| \cos \beta = y, \quad |\bar{r}| \cos \gamma = z, \quad (9.19)$$

де x, y, z – координати довільної точки M . Нормаль до заданої площини завжди паралельна діагоналі куба, сторони якого лежать на осях координат, тому напрямні косинуси нормалі дорівнюють

$$\cos \alpha_1 = \cos \beta_1 = \cos \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (9.20)$$

Підставивши вирази (9.19) і (9.20) у рівняння (9.18) і додавши до них рівняння (9.17), дістанемо систему

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + \frac{|\bar{N}|}{\sqrt{3}}, \\ m\ddot{y} = -ky + \frac{|\bar{N}|}{\sqrt{3}}, \\ m\ddot{z} = -kz + \frac{|\bar{N}|}{\sqrt{3}}, \\ x + y + z = a. \end{cases} \quad (9.21)$$

Цю систему можна розв'язувати одним з відомих методів (розділ 5), але на практиці, у деяких випадках зручніше використовувати штучний прийом, який швидше приводить до цілі. Так, наприклад, у даному разі, склавши три перших рівняння системи (9.21), матимемо

$$m(\ddot{x} + \ddot{y} + \ddot{z}) = -k(x + y + z) + \frac{3|\bar{N}|}{\sqrt{3}}.$$

Але, згідно четвертому рівнянню, $x + y + z = a = \text{const}$, так що $\ddot{x} + \ddot{y} + \ddot{z} = 0$ і, отже, $-ka + |\bar{N}|\sqrt{3} = 0$ або $|\bar{N}| = \frac{ka}{\sqrt{3}}$. Підставивши це значення у перше рівняння системи (9.21), одержимо

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{ka}{3m}, \quad (9.22)$$

а друге і третє рівняння дістанемо звідси заміною x на y і z відповідно.

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (9.22) представляє собою суму загального розв'язку x_{30} відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку $x_{\text{чн}}$ неоднорідного рівняння (розділ 4), тобто має вигляд

$$x = A_1 \cos \lambda t + B_1 \sin \lambda t + \frac{a}{3} \text{ (одержати самостійно),}$$

де $\lambda = \frac{k}{m}$; A_1 і B_1 – сталі інтегрування.

Із другого і третього рівнянь аналогічно дістанемо

$$y = A_2 \cos \lambda t + B_2 \sin \lambda t + \frac{a}{3},$$

$$z = A_3 \cos \lambda t + B_3 \sin \lambda t + \frac{a}{3}.$$

З урахуванням початкових умов задачі, одержимо такі значення сталих інтегрування:

$$A_1 = \frac{2a}{3}, \quad A_2 = A_3 = -\frac{a}{3}, \quad B_1 = B_2 = B_3 = 0.$$

Тоді остаточно матимемо

$$\begin{cases} x = \frac{a}{3}(1 + 2 \cos \lambda t), \\ y = \frac{a}{3}(1 - \cos \lambda t), \\ z = \frac{a}{3}(1 - \cos \lambda t), \end{cases} \quad \text{— закон руху;}$$

$$|\bar{N}| = \frac{ka}{\sqrt{3}} \text{ — реакція площини.}$$

$$z = A_3 \cos \lambda t + B_3 \sin \lambda t + \frac{a}{3}.$$

З урахуванням початкових умов задачі, одержимо такі значення сталих інтегрування:

$$A_1 = \frac{2a}{3}, \quad A_2 = A_3 = -\frac{a}{3}, \quad B_1 = B_2 = B_3 = 0.$$

Тоді остаточно матимемо

$$\begin{cases} x = \frac{a}{3}(1 + 2 \cos \lambda t), \\ y = \frac{a}{3}(1 - \cos \lambda t), \\ z = \frac{a}{3}(1 - \cos \lambda t), \end{cases} \quad \text{— закон руху;}$$

$$|\overline{N}| = \frac{ka}{\sqrt{3}} \text{ — реакція площини.}$$

9.4. Задачі теплопровідності

Задача 1 (диференціальне рівняння стаціонарної теплопровідності). Використовуючи диференціальне рівняння стаціонарної теплопровідності, знайти розподіл (рівняння) температурного поля в плоскій стінці (рис. 9.13) і питомий тепловий потік q для одновимірної задачі з граничними умовами першого роду (задані значення температури на торцях стінки).

Розв'язання. З теорії теплопровідності відомо, що диференціальне рівняння стаціонарної теплопровідності для одновимірного поля при сталому значенні коефіцієнта теплопровідності λ має вигляд

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0, \quad (9.23)$$

де $T = T(x)$ — функція температури.

Нехай граничні умови першого роду задані у вигляді

$$T(0) = T_1, \quad T(l) = T_2, \quad (9.24)$$

де l — товщина стінки.

Тоді після першого інтегрування рівняння (9.23), матимемо

$$\frac{dT}{dx} = C_1 \quad (C_1 = \text{const}). \quad (9.25)$$

Звідси

$$T(x) = C_1 x + C_2, \quad (9.26)$$

тобто температура в плоскій стінці змінюється за лінійним законом ($\lambda = \text{const}$).

Сталі інтегрування визначимо використовуючи граничні умови (2.24), дістанемо

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{l}, \quad C_2 = T_1. \quad (9.27)$$

Підставляючи значення C_1 і C_2 у рівняння (9.26) температурного поля, одержуємо

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} x.$$

Результати розрахунків наведені на рис. 9.14 при $T_1 = 300^\circ\text{C}$, $T_2 = 900^\circ\text{C}$, $l = 200\text{ см}$.

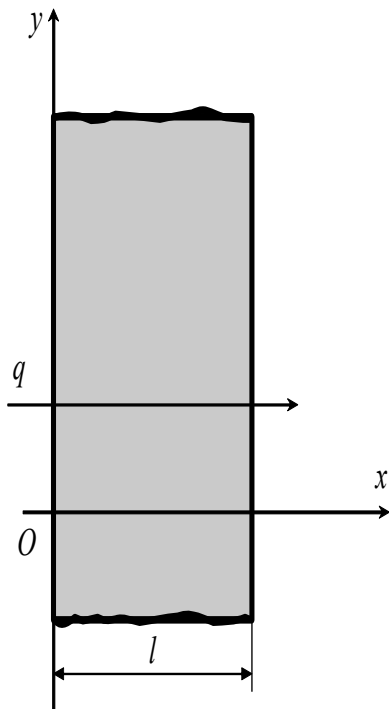


Рис. 9.13

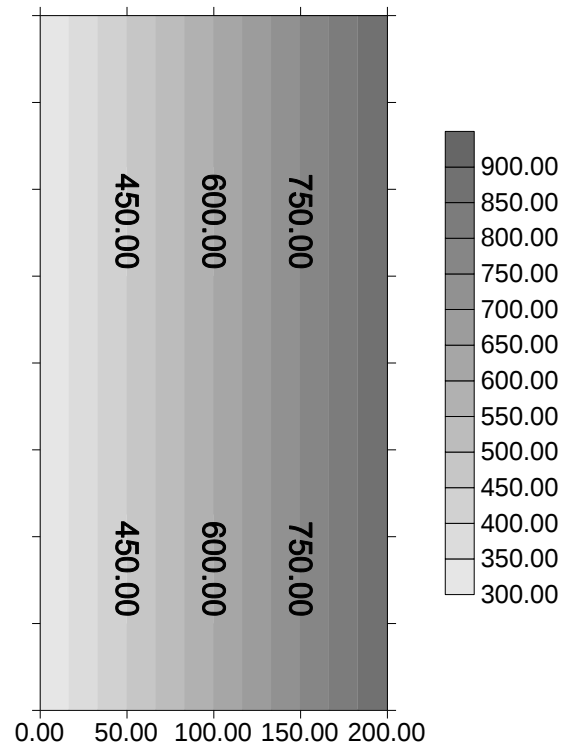


Рис. 9.14

Для визначення кількості тепла q , яке проходить через одиницю поверхні стінки в одиницю часу в напрямку осі Ox в теорії теплопровідності користуються законом Фур'є

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}.$$

Підставляючи сюди (9.25), з урахуванням (9.27), остаточно матимемо

$$q = \frac{\lambda}{l} (T_1 - T_2).$$

Задача 2 (про стаціонарне температурне поле у циліндричній трубі). Нескінчена довга циліндрична труба (стінка) з внутрішнім радіусом $r_{\text{вн}}$ і зовнішнім $r_{\text{зовн}}$ має сталий коефіцієнт теплопровідності λ . Усередині цієї труби (стінки) маємо рівномірно розподілені джерела тепла інтенсивністю $q_v = Ar$ ($r_{\text{вн}} \leq r \leq r_{\text{зовн}}$). Температура навколишнього середовища з боку зовнішньої поверхні труби дорівнює T_0 ; коефіцієнт тепловіддачі на зовнішній поверхні труби дорівнює $\alpha = \text{const}$ (граничні умови третього роду). Знайти розподіл стаціонарного поля температури в трубі (стінці).

Розв'язання. Диференціальне рівняння стаціонарної теплопровідності у цьому випадку має вигляд

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (9.28)$$

Граничні умови:

$$\left(\frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r=r_{\text{вн}}} = 0, \quad \left(\frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r=r_{\text{зовн}}} = -\frac{\alpha}{\lambda} (T_{\text{зовн}} - T_0), \quad (9.29)$$

де $T_{\text{зовн}}$ – температура зовнішньої поверхні труби.

Рівняння (9.28) – це диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно невідомої функції і допускає зниження порядку (п. 2.3) за допомогою підстановки $\frac{dT}{dr} = z$, де z – нова невідома функція. Тоді враховуючи, що $q_v = Ar$, рівняння (9.28) прийме вигляд

$$\frac{dz}{dr} + \frac{z}{r} = -\frac{A}{\lambda} r.$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно функції z . Його загальний розв'язок одержимо у вигляді (перевірити самостійно)

$$z = \frac{C_1}{r} - \frac{A}{3\lambda} r^2.$$

Тоді матимемо

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r} - \frac{A}{3\lambda} r^2,$$

або, після інтегрування, дістанемо

$$T(r) = -\frac{A}{9\lambda} r^3 + C_1 \ln|r| + C_2. \quad (9.30)$$

Сталі величини C_1 і C_2 знайдемо з граничних умов (9.29). З умови на поверхні $r = r_{\text{вн}}$, випливає

$$C_1 = \frac{Ar_{\text{вн}}^3}{3\lambda}.$$

При $r = r_{\text{зовн}}$ з рівняння (9.30) з урахуванням виразу для C_1 одержуємо

$$T_{\text{зовн}} = -\frac{Ar_{\text{зовн}}^3}{9\lambda} + \frac{Ar_{\text{вн}}^3}{3\lambda} \ln r_{\text{зовн}} + C_2$$

З іншого боку, з урахуванням умови на $r = r_{\text{зовн}}$, матимемо

$$T_{\text{зовн}} = \frac{Ar_{\text{зовн}}^2}{3\alpha} - \frac{Ar_{\text{вн}}^3}{3\alpha r_{\text{зовн}}} + T_0.$$

Прирівнюючи праві частини виразів для $T_{\text{зовн}}$, дістанемо

$$C_2 = T_0 + \frac{Ar_{\text{зовн}}^3}{3\alpha} - \frac{Ar_{\text{вн}}^3}{3\alpha r_{\text{зовн}}} + \frac{Ar_{\text{зовн}}^3}{9\lambda} - \frac{Ar_{\text{вн}}^3}{3\lambda} \ln r_{\text{зовн}}.$$

Підставляючи значення C_1 і C_2 у (9.30), одержуємо остаточно співвідношення для стаціонарного поля температури в трубі (стінці)

$$T(r) = T_0 + \frac{Ar_{\text{зовн}}^2}{3\alpha} \left[1 - \left(\frac{r_{\text{вн}}}{r_{\text{зовн}}} \right)^3 \right] + \frac{Ar_{\text{зовн}}^3}{9\lambda} \left[1 - \left(\frac{r}{r_{\text{зовн}}} \right)^3 + 3 \left(\frac{r_{\text{вн}}}{r_{\text{зовн}}} \right)^3 \ln \left| \frac{r}{r_{\text{зовн}}} \right| \right].$$

На рис. 9.15 наведені результати для труб з азбесту та сталі при таких значеннях параметрів:

$$\lambda_{\text{ст}} = 53,6 \text{ Вт/(градус} \cdot \text{м)},$$

$$\lambda_{\text{азб}} = 0,1163 \text{ Вт/(градус} \cdot \text{м)}, \quad T_0 = 100 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad r_{\text{вн}} = 0,1 \text{ м}, \quad r_{\text{зовн}} = 0,5 \text{ м},$$

$$A = 17,1 \cdot 10^5, \quad \alpha = 500 \text{ Вт/(градус} \cdot \text{м}^2).$$

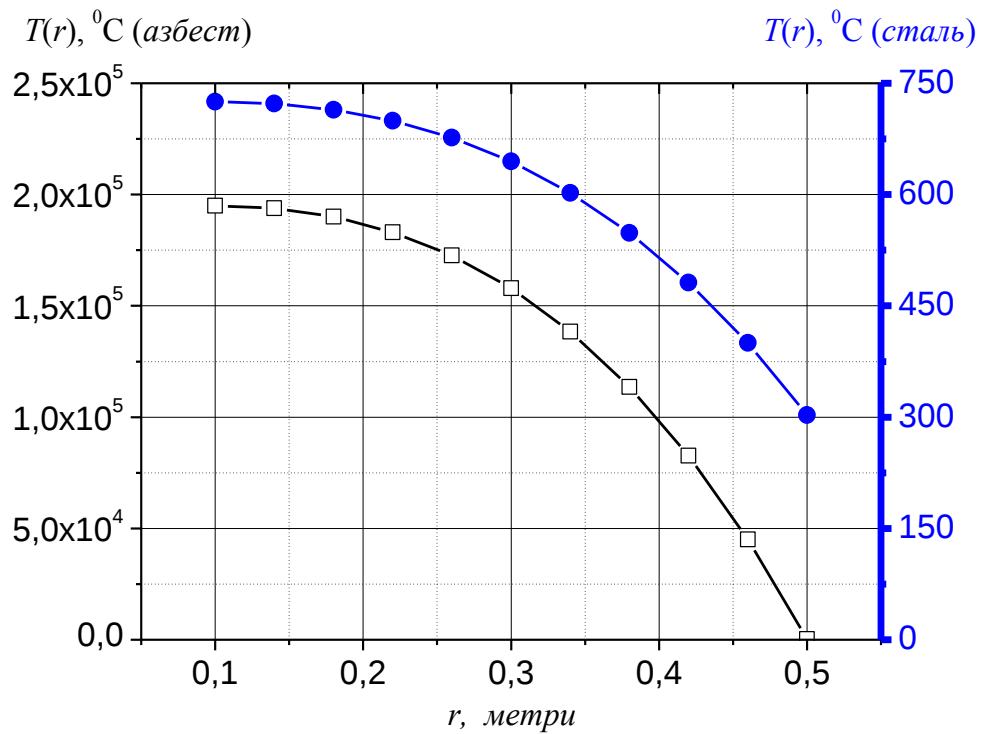


Рис. 9.15

Задача 3 (про нестационарне температурне поле в нескінченній пластині заданої товщини). Знайти розподіл температури $T(x, t)$ в нескінченній пластині товщиною h , якщо вона мала температуру T_0 , а у початковий момент часу t_0 температуру її поверхні $x = 0$ швидко зменшили до T_1 .

Розв'язання. Поле температури у заданих умовах описується рівнянням

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (9.31)$$

де $\theta = \theta(x, t) = T(x, t) - T_1$, a – коефіцієнт теплопровідності, а також початковими та граничними умовами

$$\theta(0; t_0) = T_0 - T_1 = \Delta T; \quad \theta(0; t) = 0; \quad \theta(h; t) = \Delta T. \quad (9.32)$$

Введемо до розгляду нову незалежну змінну

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{at}}. \quad (9.33)$$

Тоді

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{4} \frac{x}{t\sqrt{at}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi}; \quad (9.34)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{at}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{4at} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}. \quad (9.35)$$

Підставляючи (9.34), (9.35) у (9.31) з урахуванням (9.33), одержуємо таке рівняння:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + 2\xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0. \quad (9.36)$$

Умови (9.32) матимуть вигляд

$$\theta|_{\xi=0} = 0; \quad \theta \Big|_{\xi=\frac{h}{2\sqrt{at}}} = \Delta T. \quad (9.37)$$

Таким чином, задача звелася до однієї змінної.

Зробимо заміну

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = u. \quad (9.38)$$

Тоді рівняння (9.36) запишеться у вигляді

$$u' + 2\xi u = 0.$$

Інтегрування останнього рівняння дає розв'язок

$$u = C_1 e^{-\xi^2}. \quad (9.39)$$

Приймаючи до уваги (9.38), рівняння (9.39) матиме вигляд

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = C_1 e^{-\xi^2}. \quad (9.40)$$

Розв'язком рівняння (9.40) буде функція

$$\theta = C_1 \int_0^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi + C_2. \quad (9.41)$$

Використовуючи умови (9.37), дістанемо

$$C_1 = \frac{2\Delta T}{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(h)}; \quad C_2 = 0,$$

$$\text{де } \operatorname{erf}(h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^h e^{-\xi^2} d\xi.$$

Отже, підставляючи θ , C_1 і C_2 у розв'язок (9.41), остаточно одержимо розв'язок нашої задачі у вигляді

$$T(x,t) = T_0 + \frac{T_0 - T_1}{\operatorname{erf}(h)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{ta}}\right).$$

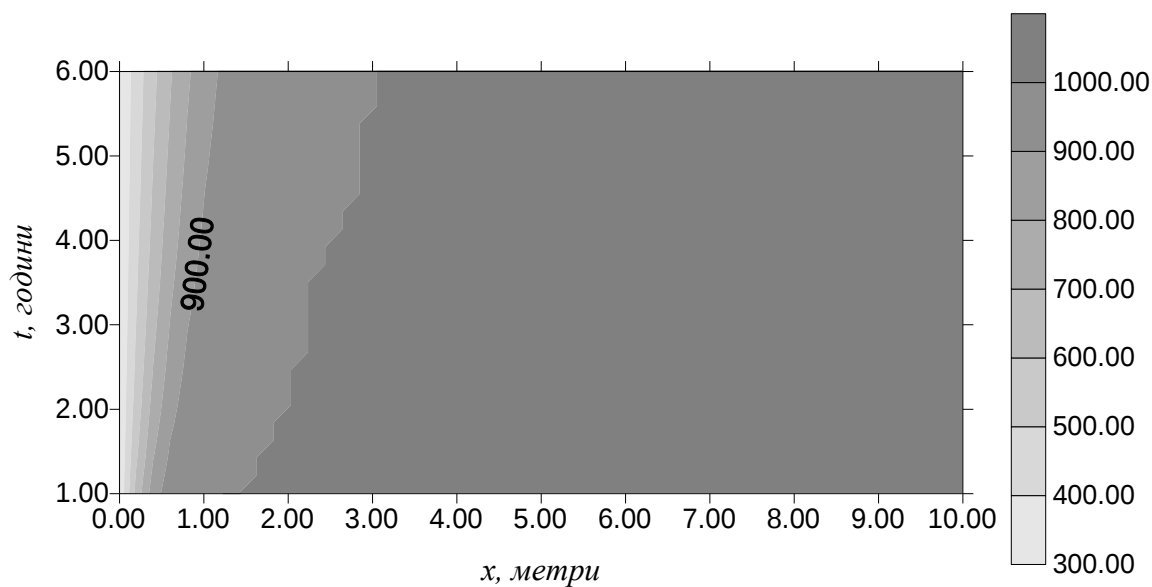


Рис. 9.16

На рис. 9.16 наведені результати для пластини товщиною $h = 10$ м при $a = 0.053 \frac{\text{м}^2}{\text{год}}$, $T_0 = 1000$ $^{\circ}\text{C}$, $T_1 = 300$ $^{\circ}\text{C}$, $t_0 = 1$ год.

9.5. Різні задачі

Задача 1 (задача теорії керування). Для сучасної техніки, що працює в умовах новітніх технологій, тобто має справу з високими енергіями, космічними швидкостями, швидкоплинними процесами, дорогоцінними установками і експериментами, характерною є необхідність найбільш раціонального використання ресурсів, вибору найкращої програми дій. Все це визначає ті проблеми, які є предметом теорії оптимального керування, яка тісно зв'язана з теорією диференціальних рівнянь.

Нехай маємо керуючий об'єкт, закон руху якого описується диференціальним рівнянням

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu, \quad (9.42)$$

де $a > 0$ і $b \neq 0$ – сталі величини; u – деякий параметр керування. Задача керування полягає в тому, щоб перевести цей об'єкт з початкового стану $x(0) = x_0$ в початок координат $x_1 = 0$ за оптимальною траєкторією.

Розв'язання. Якщо вважати, що параметр керування u може набувати довільних значень, тобто область керування збігається з усією дійсною прямою, то існує нескінченна множина значень $u(t)$, які реалізують мету керування.

Справді, візьмемо довільне число $T > 0$ і виберемо функцію $u(t)$ у вигляді

$$u(t) = -\frac{2ax_0}{b(1 - e^{-2aT})}e^{-at}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (9.43)$$

Тоді, інтегруючи диференціальне рівняння (9.42), з урахуванням початкової умови $x(0) = x_0$, матимемо

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - e^{-2aT}}(e^{-at} - e^{at}) + x_0e^{at}. \quad (9.44)$$

Співвідношення (9.44) визначає траєкторію, що відповідає неперервному керуванню (9.43).

Отже, який би не був початковий стан x_0 , керування (9.43) завжди переводить об'єкт з цього початкового стану в початок координат за оптимальною траєкторією (9.44).

Якщо параметр керування u має допустиму область U , обмежену, наприклад $|u| \leq 1$, то задача не завжди має розв'язок.

Задача 2 (про збільшення грошових вкладів). Суму A грн. покладено в банк на $p\%$ в рік. Знайти закон зміни суми при умові, що проценти нараховуються неперервно. За встановленим законом відповісти на такі питання:

а) суму 500000 грн. покладено в банк на 12% в рік; через скільки років вона становитиме 2000000 грн.?

б) через скільки років вдвоє збільшиться 100 грн., що зберігаються на 15% -му вкладі?

Розв'язання. Загальна сума S вкладу в результаті нарахування процентів один раз в кінці року виражається формулою

$$S = A(1 + p).$$

Якщо проценти нараховуються через півроку, то

$$S = A\left(1 + \frac{p}{2}\right)^2,$$

якщо поквартально, то

$$S = A\left(1 + \frac{p}{4}\right)^4,$$

і якщо кожного місяця, то відповідно

$$S = A\left(1 + \frac{p}{12}\right)^{12}.$$

Отже, у загальному випадку в кінці року сума становитиме

$$S = A\left(1 + \frac{p}{k}\right)^k$$

при $p\%$ річних, що нараховуються k раз на рік (наприклад 365 разів за рік, тобто щоденно).

Через n років загальна сума дорівнюватиме

$$S = A\left[\left(1 + \frac{p}{k}\right)^k\right]^n.$$

Якщо число k нарахувань процентів за рік буде необмежено збільшуватися, то

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} A\left[\left(1 + \frac{p}{k}\right)^k\right]^n = A \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{\frac{k}{p}}\right]^{np}. \quad (9.45)$$

За формулою другої важливої границі, маємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{\frac{k}{p}}\right] = e.$$

Тоді рівність (9.45) набирає вигляду

$$S = Ae^{np}.$$

Замінивши n на t , де t – час, дістанемо суму, що накопичиться через деякий час t :

$$S = Ae^{tp}.$$

За короткий проміжок часу dt збільшення суми S становитиме

$$dS = d(Ae^{pt}) = p(Ae^{pt})dt = pSdt.$$

Відокремлюючи в цьому рівнянні змінні, дістанемо диференціальне рівняння розглядуваної задачі:

$$\frac{dS}{S} = p dt. \quad (9.46)$$

Щоб відповісти на питання а), проінтегруємо рівняння (9.46). Маємо

$$\int_{500000}^{2000000} \frac{dS}{S} = 0,12 \int_0^t dt,$$

звідки

$$\ln 4 = 0,12t.$$

Визначаємо шуканий час:

$$t = \frac{\ln 4}{0,12} = 11,55 \text{ років.}$$

Відповідаючи на питання б), з рівняння (9.46) дістаємо

$$\int_{100}^{200} \frac{dS}{S} = 0,15 \int_0^t dt.$$

Отже,

$$t = \frac{\ln 2}{0,15} = 4,62 \text{ років.}$$

Задача 3 (модель епідемії). У місті, населення якого складає a осіб, з'являються b інфекційних хворих осіб, що викликає епідемію. Припустимо, що приріст хворих за добу пропорційний добутку числа здорових (які ще не перехворіли і не придбали імунітет) осіб на число хворих осіб. Коефіцієнт пропорційності k враховує різноманітні міри профілактики. Якщо, наприклад, мешканці міста будуть носити марлеві пов'язки або зроблять щеплення, то цей коефіцієнт зменшиться. Необхідно змодельовати процес епідемії (динаміку зміни числа хворих і здорових осіб).

Розв'язання. Дана задача про епідемію зводиться до розв'язання системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = x[ky - 1], \\ \dot{y} = -kxy; \end{cases} \quad (9.47)$$

де $x = x(t)$ – хворі, $y = y(t)$ – здорові; з початковими умовами

$$x(1) = b, \quad y(1) = a. \quad (9.48)$$

Отже треба розв'язати задачу Коші (9.47), (9.48). Для її розв'язання зручніше скористатися чисельним методом, наприклад, методом Рунге-Кутта (розділ 8).

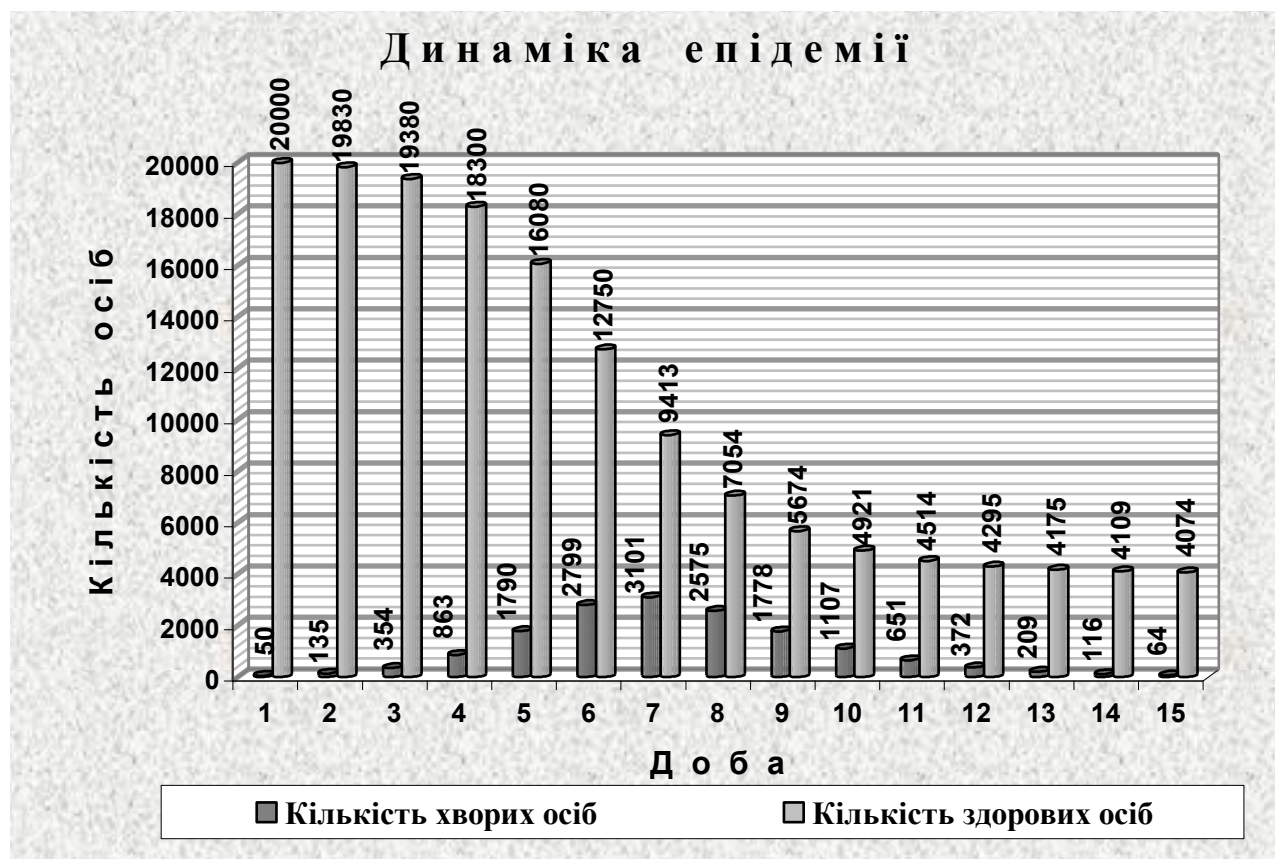


Рис. 9.17

Результати розрахунку графічно відображені на рис. 9.17 при наступних значеннях параметрів: $a = 20000$; $b = 50$; $k = 0,0001$. З наведеної діаграми видно, що к п'ятнадцятій добі спостерігається істотний спад епідемії; у місті було 64 хворих осіб. Критична точка – сьома доба (3101 хворих), заради пошуку якої і виникає необхідність моделювання динаміки епідемій. Моделюючи епідемію ми можемо розпланувати роботу медичних служб міста – підвезти до аптек ліки, відкликати лікарів із відпуски та ін.

Задача 4 (про хімічну реакцію). Внаслідок хімічної реакції між речовинами A та B масами m_1 та m_2 утворюється третя речовина C . Встановити залежність маси цієї речовини від часу, якщо швидкість реакції пропорційна добутку реагуючих мас.

Розв'язання. Нехай $x = x(t)$ кількість речовини C , яка утворилась за час t після початку реакції. Тоді $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ – швидкість утворення речовини C (швидкість реакції).

За умовою задачі

$$\dot{x} = k(m_1 - x)(m_2 - x), \quad x(0) = 0,$$

де $k > 0$ – коефіцієнт пропорційності, який для кожної речовини визначається з експерименту. Відокремлюючи змінні, дістаємо

$$\frac{dx}{(m_1 - x)(m_2 - x)} = k dt.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(m_1 - x)(m_2 - x)} &= \frac{1}{m_2 - m_1} \left(\int \frac{dx}{m_1 - x} - \int \frac{dx}{m_2 - x} \right) = \\ &= \frac{1}{m_2 - m_1} \ln \left| \frac{m_2 - x}{m_1 - x} \right| + C. \end{aligned}$$

Отже, матимемо загальний інтеграл диференціального рівняння у вигляді

$$\ln \left| \frac{m_2 - x}{m_1 - x} \right| - \ln C = k(m_2 - m_1)t,$$

або після потенціювання

$$\frac{m_2 - x}{m_1 - x} = C e^{k(m_2 - m_1)t}.$$

З початкової умови $C = \frac{m_2}{m_1}$, тоді

$$\frac{m_2 - x}{m_1 - x} = \frac{m_2}{m_1} e^{k(m_2 - m_1)t}$$

або остаточно

$$x(t) = m_1 m_2 \frac{1 - e^{k(m_2 - m_1)t}}{m_1 - m_2 e^{k(m_2 - m_1)t}}.$$

ДОДАТКИ

ДОДАТОК 1

Таблиця основних інтегралів

Кожна з формул цієї таблиці справедлива в будь-якому інтервалі, що міститься в області існування відповідної підінтегральної функції. У всіх формулах під u розуміють незалежну змінну, або довільну функцію будь-якої незалежної змінної, що має похідну в деякому інтервалі; $C = \text{const}$, $k = \text{const}$.

№ з/п	ФОРМУЛА	№ з/п	ФОРМУЛА
1	$\int 0 \cdot du = C$	13	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\text{ctg } u + C$
2	$\int du = u + C$	14	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \text{tg } u + C$
3	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ (n – стала, $n \neq -1$)	15	$\int \frac{du}{k^2 + u^2} = \frac{1}{k} \arctg \frac{u}{k} + C$
4	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	16	$\int \frac{du}{\sqrt{k^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{k} + C$
5	$\int a^{ku} du = \frac{a^{ku}}{k \ln a} + C$ (a – стала, $a > 0$, $a \neq 1$)	17	$\int \frac{du}{k^2 - u^2} = \frac{1}{2k} \ln \left \frac{k+u}{k-u} \right + C$
6	$\int e^{ku} du = \frac{1}{k} e^{ku} + C$	18	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm k^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm k^2} \right + C$
7	$\int \sin ku du = -\frac{1}{k} \cos ku + C$	19	$\int \text{sh } ku du = \frac{1}{k} \text{ch } ku + C$
8	$\int \cos ku du = \frac{1}{k} \sin ku + C$	20	$\int \text{ch } ku du = \frac{1}{k} \text{sh } ku + C$
9	$\int \text{tg } ku du = -\frac{1}{k} \ln \cos ku + C$	21	$\int \text{sh}^2 ku du = \frac{1}{2k} \text{sh } ku \cdot \text{ch } ku - \frac{u}{2} + C$
10	$\int \text{ctg } ku du = \frac{1}{k} \ln \sin ku + C$	22	$\int \text{ch}^2 ku du = \frac{1}{2k} \text{sh } ku \cdot \text{ch } ku + \frac{u}{2} + C$
11	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \text{tg } \frac{u}{2} \right + C$	23	$\int \sqrt{k^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{k^2 - u^2} +$ $\frac{k^2}{2} \arcsin \frac{u}{k} + C$
12	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \text{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$	24	$\int \sqrt{k^2 + u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{k^2 + u^2} +$ $\frac{k^2}{2} \ln \left u + \sqrt{k^2 + u^2} \right + C$

Основні типи диференціальних рівнянь та метод їх розв'язування**I. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними**

$$M(x)dx + N(y)dy = 0.$$

Загальний розв'язок

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \quad (C = \text{const}).$$

II. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

або

$$y' = f_1(x)f_2(y).$$

Відокремлюючи змінні, дістаємо рівняння типу I.

III. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y), \quad f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

Підстановкою $y = u(x)x$, $y' = u'x + u$ зводимо до типу II.

IV. Диференціальні рівняння першого порядку виду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right).$$

Якщо $ab_1 \neq ba_1$, то підстановкою $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$ зводимо його до типу III.

Якщо $ab_1 = ba_1$, то підстановкою $z = ax + by$ зводимо його до типу II.

V. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

а) метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Спочатку відшукуємо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$, яке у свою чергу належить до типу II. Його загальний розв'язок матиме вигляд $y = Ce^{-\int P(x)dx}$. Потім вважаємо $C = C(x)$ і визначаємо $C(x)$ так, щоб функція $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ була розв'язком неоднорідного рівняння. Нарешті одержуємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у вигляді

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[C_1 + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right].$$

б) метод заміни невідомої функції (метод Бернуллі). Підстановкою $y = u(x)v(x)$ зводимо до двох рівнянь типу II для визначення функцій $u(x)$ і $v(x)$.

VI. Диференціальне рівняння Бернуллі

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (n \neq 0, n \neq 1).$$

Підстановкою $z = y^{-n+1}$ зводимо до диференціального рівняння типу V, або підстановкою $y = u(x)v(x)$ зводимо до двох рівнянь типу II для визначення функцій $u(x)$ і $v(x)$.

VII. Загальне рівняння Ріккати

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

Спочатку треба знайти за видом правої частини або підбором частинний розв'язок y_1 . Потім підстановкою $y = y_1 + z(x)$ ($z(x)$ – нова невідома функція) зводимо рівняння Ріккати до рівняння Бернуллі VI.

VIII. Диференціальні рівняння у повних диференціалах

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

якщо

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Загальний розв'язок

$$\int_{x_0}^x M(x, y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy = C$$

IX. Диференціальні рівняння першого порядку, нерозв'язані відносно похідної, які не містять явно невідомої функції

$$F(x, y') = 0.$$

Застосовуємо метод введення параметра

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t).$$

Загальний розв'язок

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C.$$

Якщо рівняння $F(x, y') = 0$ досить просто розв'язати відносно x , то зручно ввести $y' = t$, тоді загальний розв'язок матиме вигляд

$$x = \varphi(t), \quad y = \int t \varphi'(t) dt + C.$$

X. Диференціальні рівняння першого порядку, нерозв'язані відносно похідної, що не містять явно незалежної змінної

$$F(y, y') = 0.$$

Метод введення параметра

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t).$$

Загальний розв'язок

$$x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} + C, \quad y = \varphi(t).$$

Якщо рівняння $F(y, y') = 0$ досить просто розв'язати відносно y , то зручно ввести $y' = t$, тоді загальний розв'язок матиме вигляд

$$x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{t} + C, \quad y = \varphi(t).$$

XI. Диференціальне рівняння Лагранжа

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Підстановкою $y' = p(x)$ і наступним диференціюванням зводимо його до рівняння типу V.

XII. Диференціальне рівняння Клеро

$$y = y'x + \psi(y').$$

Підстановкою $y' = p(x)$ і наступним диференціюванням зводимо його до рівняння типу V. Загальний розв'язок $y = Cx + \psi(C)$.

XIII. Диференціальні рівняння n -го порядку виду

$$y^{(n)} = f(x).$$

Загальний розв'язок знаходиться n -кратним інтегруванням.

XIV. Диференціальні рівняння n -го порядку виду

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0.$$

Параметричне інтегрування

$$y^{(n)} = \varphi(t), \quad y^{(n-1)} = \psi(t),$$

Загальний розв'язок

$$x = \int \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + C_1, \quad y = \Phi(t, C_2, C_3, \dots, C_n).$$

Якщо рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, то підстановка $z = y^{(n-1)}$ відразу зводить його до рівняння типу II.

XV. Диференціальні рівняння n -го порядку виду

$$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0.$$

Підстановкою $z = y^{(n-2)}$ зводимо до рівняння другого порядку $F(z'', z) = 0$, яке інтегрується методом введення параметра

$$z = \varphi(t), \quad z'' = \psi(t)$$

Загальний розв'язок

$$x = \pm \int \frac{\varphi'(t)dt}{\sqrt{2 \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1}} + C_2,$$
$$y = \underbrace{\int dx \int dx \dots \int \varphi(x)dx}_{n-2}.$$

XVI. Диференціальні рівняння n -го порядку, що допускають його зниження. Рівняння, які не містять явно невідомої функції, а також її $(k-1)$ перших похідних

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Підстановкою $y^{(k)} = z(x)$ знижуємо порядок рівняння до $n-k < n$. Одержуємо його загальний інтеграл у вигляді $\Phi(x, z, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) = 0$ і вертаючись до змінної y , дістанемо рівняння $\Phi(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) = 0$, яке належатиме до одного з розглянутих вище типів.

XVII. Диференціальні рівняння n -го порядку, що допускають його зниження. Рівняння, які не містять явно незалежної змінної

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Підстановкою $p(y) = y'$ знижуємо порядок рівняння на одиницю. Матимемо диференціальне рівняння, яке заздалегідь інтегрується у квадратурах. Його загальний інтеграл одержимо у вигляді $\Phi(y, p, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$. Повертаючись до змінної y , дістанемо рівняння першого порядку $\Phi\left(y, \frac{dy}{dx}, C_1, \dots, C_{n-1}\right) = 0$.

XVIII. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку з сталими коефіцієнтами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

де коефіцієнти a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – дійсні числа (сталі).

Складаємо характеристичне рівняння

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

і відшукуємо загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння у вигляді

$$y_{30}(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x),$$

де $y_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння, які повністю визначаються коренями k характеристичного рівняння таким чином

Корені характеристично го рівняння	Фундаментальна система розв'язків $y_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)	Загальний розв'язок $y_{30}(x)$
Корені характеристичног о рівняння – числа дійсні різні, тобто $k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_n$	$e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}$	$y_{30} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}$
Характеристичне рівняння має кратні корені, тобто k_1 кратності m_1 , k_2 кратності m_2 ,, k_p кратності m_p , $\sum_{i=1}^p m_i = n, m_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, p$	$e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, x^2 e^{k_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{k_1 x},$ $e^{k_2 x}, x e^{k_2 x}, x^2 e^{k_2 x}, \dots, x^{m_2-1} e^{k_2 x},$, $e^{k_p x}, x e^{k_p x}, x^2 e^{k_p x}, \dots, x^{m_p-1} e^{k_p x}$	$y_{30} = e^{k_1 x} \sum_{i=1}^{m_1} C_i x^{i-1} +$ $+ e^{k_2 x} \sum_{i=1}^{m_2} C_{m_1+i} x^{i-1} + \dots +$ $+ e^{k_p x} \sum_{i=1}^{m_p} C_{h+i} x^{i-1},$ де $h = m_1 + m_2 + \dots + m_{p-1}$

Якщо серед коренів характеристичного рівняння є пара комплексних спряжених коренів, то кожній такій парі відповідає два частинних розв'язки виду $e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $e^{\alpha x} \sin \beta x$. У випадку, коли серед коренів характеристичного рівняння є числа комплексні спряжені кратні, то m -кратному комплексному кореню $\alpha + i\beta$ характеристичного рівняння в загальному розв'язку відповідатимуть таких $2m$ членів: $e^{\alpha x} (C_{11} + C_{12}x + C_{13}x^2 + \dots + C_{1m}x^{m-1}) \cos \beta x$ і $e^{\alpha x} (C_{21} + C_{22}x + C_{23}x^2 + \dots + C_{2m}x^{m-1}) \sin \beta x$.

XIX. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку з сталими коефіцієнтами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

де коефіцієнти a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – дійсні числа (сталі).

а) метод варіації довільних сталих. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння відшукуємо у вигляді

$$y_{3n}(x) = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i(x),$$

де $y_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – частинні розв’язки відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння, а функції $C_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – визначаються із системи

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0, \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0, \\ \dots, \\ C'_1 y_1^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \dots + C'_n y_n^{(n-2)} = 0, \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

б) метод невизначених коефіцієнтів. У випадку, коли функція $f(x)$ має так званий спеціальний вигляд розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зручніше шукати методом невизначених коефіцієнтів суть, якого полягає у наступному:

➤ якщо $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен степеня n , то частинний розв’язок $y_{\text{чн}}(x)$ неоднорідного рівняння відшукують у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} Q_n(x),$$

де r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють α , а $Q_n(x)$ – многочлен того же степеня, що і $P_n(x)$, але в загальному виді, коефіцієнти якого треба визначити;

➤ якщо $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x)$, де $P_n(x)$ і $R_m(x)$ – многочлени степенів n і m відповідно, α та β – дійсні числа, то частинний розв’язок $y_{\text{чн}}(x)$ неоднорідного рівняння відшукують у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} (U_s(x) \cos \beta x + V_s(x) \sin \beta x),$$

де $U_s(x)$ та $V_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами; s – найвищий степінь многочленів $P_n(x)$ та $R_m(x)$, тобто $s = \max(n, m)$; r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $\alpha \pm i\beta$.

XX. Системи звичайних диференціальних рівнянь.

а) нормальна система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots, \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Методом виключення невідомих функцій, крім однієї, зводимо до рівняння типу XVIII або XIX.

б) лінійна однорідна система диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ \dots, \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n, \end{cases}$$

де a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) – сталі величини. Методом Ейлера відшукуємо частинний розв’язок системи у вигляді

$$y_1 = \alpha_1 e^{kx}, y_2 = \alpha_2 e^{kx}, \dots, y_n = \alpha_n e^{kx},$$

де k – корені характеристичного рівняння.

Загальний розв'язок матиме вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(x) = \sum_{i=1}^n C_i \alpha_{1i} e^{k_i x}, \\ y_2(x) = \sum_{i=1}^n C_i \alpha_{2i} e^{k_i x}, \\ \dots\dots\dots, \\ y_n(x) = \sum_{i=1}^n C_i \alpha_{ni} e^{k_i x}. \end{array} \right.$$

в) лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \dots\dots\dots, \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{array} \right.$$

де a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) – сталі величини; $f_i(x)$ – задані неперервні функції. Методом варіації довільних сталих відшукуємо розв'язок системи у вигляді

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n C_i(x) Y_i(x)$$

де $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$; $Y_i(x)$ – лінійно незалежні частинні розв'язки відповідної однорідної

системи; $C_i(x)$ – функції, які визначаються із системи

$$\sum_{i=1}^n C_i'(x) Y_i(x) = F, \quad F = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1984. – 271 с.
2. Бусурулов О. О. Лекції з курсу звичайних диференціальних рівнянь. – Днепропетровск: Вид-во ДДУ, 1993. – 196 с.
3. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1964. – 228 с.
4. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
5. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
6. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалі Г. О. Вища математика: Приклади і задачі/ Посібник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 624 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576с.
8. Краснов М. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высш. шк., 1983. – 128 с.
9. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Т. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Высш. шк., 1978. – 287 с.
10. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Росвузиздат, 1962. – 292 с.
11. Матвеев Н. М. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1988. – 256 с.
12. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т. – М.: Наука, 1976. – Т. 1 – 2.
13. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982. – 331 с.
14. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. шк., 1989. – 383 с.
15. Соколенко О. І. Вища математика: Підручник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 432 с.
16. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 468 с.
17. Сясєв А. В. Вступ до системи MathCAD: Навч. посіб. – Д: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 108 с.
18. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 230 с.
19. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 176 с.

20. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – К.: Вища шк. Головне вид-во, 1971. – 228 с.
21. *Шкіль М. І., Сотніченко М. А.* Звичайні диференціальні рівняння: Навч.посібник. – К.: Вища шк., 1992. – 303 с.
22. *Школьник А. Г.* Дифференциальные уравнения. – М.: Учпедгиз, 1963. – 200 с.
23. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

Навчальне видання

Сяссв Андрій Валерійович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

Редактор В. П. Пименов

Технічний редактор В. А. Усенко

Коректор В. П. Пименов

Комп'ютерна верстка О. М. Гришкіної

Підписано до друку 21.03.07. Формат 60×84 1/8. Папір друкарський. Друк плоский.
Ум. друк. арк. 20,69. Обл.-вид. арк. 21,06. Ум. фарбовідб. 21,17. Тираж 300 пр.
Вид. № 1263. Зам. № 1082 .

Свідоцтво державної реєстрації № 289-ДК від 21.12.2000 р.

ДП «Видавництво ДНУ», пр. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010

Друкарня ДНУ, вул. Наукова, 5, м. Дніпропетровськ, 49050

ISBN 978-966-551-234-9



Сясєв Андрій Валерійович — доцент, кандидат фізико-математичних наук, працює доцентом кафедри диференціальних рівнянь Дніпропетровського національного університету.

У 1993 році закінчив механіко математичний факультет Дніпропетровського державного університету (нині — Дніпропетровський національний університет) і одержав кваліфікацію «механік, математик-прикладник». Після закінчення Дніпропетровського національного університету працював на посадах асистента (кафедра вищої математики Національної металургійної академії України), а потім старшого викладача кафедри диференціальних рівнянь. У 2002 році захистив кандидатську дисертацію за спеціальністю «механіка деформівного твердого тіла» і був обраний на посаду доцента.

Сясєв А.В. — автор понад 50 наукових статей, а також 15 навчально-методичних розробок, у т.ч. навчальні посібники: «Математичне моделювання та методи розрахунку теплотехнологічних процесів» (у співавторстві), «Вступ до системи MathCAD», «Вища математика. Розділ: диференціальні рівняння». Наукові інтереси: механіка деформівного твердого тіла, математичні моделі в механіці деформівного твердого тіла, задачі термомеханіки.



В даному навчальному посібнику викладено основні теоретичні питання теорії звичайних диференціальних рівнянь та методи їх розв'язування (інтегрування). Наведені докладні розв'язання типових задач з додатковими поясненнями теоретичних положень, які при цьому застосовувались. Посібник має на меті допомогти студентам оволодіти основами теорії звичайних диференціальних рівнянь і практичними навичками їх розв'язання, а також навчити проводити дослідження розв'язків диференціальних рівнянь, що описують різноманітні процеси. Достатньо уваги приділено підбору і розв'язанню задач, що роз'яснюють основні ідеї, поняття, теоретичні факти та їх практичне застосування; підбору великого числа задач для самостійного розв'язання студентами.

Для студентів та аспірантів вищих навчальних закладів, викладачів і наукових співробітників, які цікавляться теорією звичайних диференціальних рівнянь